Methods in Geochemistry and Geophysics, 18

UNDERGROUND SOUND

Application of Seismic Waves

J.E. WHITE

Charles Henry Green Professor

Department of Geophysics, Colorado School of Mines, Golden, CO 80401, U.S.A.



ELSEVIER

AMSTERDAM – OXFORD – NEW YORK, 1983

Дж. Э. УАЙТ

ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

Перевод с английского
О. В. ПАВЛОВОЙ и С. В. ГОЛЬДИНА

Редактор перевода
Н. Н. ПУЗЫРЕВ



МОСКВА „НЕДРА" 1986

УДК 550.834

Уайт Дж. Э. Возбуждение и распространение сейсмических волн Пер. с англ. О. В. Павловой и С. В. Гольдина Редактор пер. Н. Н. Пузырев — М: Недра, 1986.— 261 с.

Рассмотрены результаты исследований возбуждения и распространения сейсмических волн в дискретных средах; поглощения волн с учетом нелинейных связей между напряжениями и деформациями сред, анизотропности их при различной текстуре пород, механизма потерь энергии волн; использования звуковых волн в скважинах. Коротко даны теоретические основы сейсмических методов исследования скважин. Показано значение изучения волн для прямых поисков нефти и газа

Для геофизиков-сейсморазведчиков производственных организаций. Представит интерес для специалистов по сейсмологии и геоакустике

Табл 3, ил 122, список лит — 203 назв

Рекомендована к переводу Институтом геологии и геофизики СО АН СССР

У $\frac{1903020000-298}{043(01)-86}$ 42—86

Предисловие

Строгий математический подход к решению задач о распространении сейсмических волн, безусловно, обеспечивает полное понимание физики волновых процессов и соответственно свойств горных пород. Успехи, достигнутые в математике в течение многих лет, привели к появлению большого количества теоретических работ, связанных с сейсмологией землетрясений, сейсмической разведкой и другими техническими приложениями звуковых волн. К счастью, многие результаты теоретических подходов к изучению геологических объектов могут быть приняты и применены на практике без глубокого знания математического аппарата, используемого для обоснования этих результатов.

Цель книги — описание возбуждения, распространения и приема сейсмических волн в различных аспектах, причем во многих случаях с большой детальностью При этом от читателя не требуется знания соответствующих разделов высшей математики во всей их полноте. Например, не применяются формализованные векторные операции, не используется символика и операции с тензорами. Хотя предполагается знакомство с алгеброй комплексных чисел, но автор избегает использования функций комплексного переменного, а об интегрировании в комплексной плоскости даже не упоминается. В связи с этим преобразования Фурье для любой функции приводятся в таком виде, чтобы читатель имел возможность сверять результаты по таблицам интегралов. Знания дифференциального и интегрального исчисления, а также курса дифференциальных уравнений вполне достаточно для понимания обсуждаемых в книге проблем. Очевидно, при таком способе изложения материала мы чем-то поступились Так, некоторые выражения могли бы быть написаны более компактно. Кроме того, теряются возможности обобщения некоторых результатов. Выбор математического аппарата в некоторых случаях базируется на физических соображениях, хотя можно было бы дать более точное и общее решение. Если такой подход позволит воспринять обсуждаемые принципы и применить их к интересующим проблемам, он будет оправдан.

Сделаем некоторые замечания относительно названия книги[1]. Область акустики уже давно переросла границы слышимых звуков, и упругие волны в жидких и твердых телах были приняты как логическое расширение этой области знания. В течение последней половины столетия была развита технология, связанная с изучением волн в воде: физическое описание океанов, создание датчиков для возбуждения и обнаружения звуковых волн, усовер-

[1] В оригинале книга называется «Подземный звук» (Прим. перев).

шенствованные схемы обработки данных, измерение уровня звуковых шумов от естественных и искусственных источников, способы измерения физических свойств жидкостей. Все это принято обозначать термином «подводный звук». Близкая по содержанию технология была развита в связи с использованием волн, распространяющихся в земле. Термин «Подземный звук» тесно привязан к этой технологии; причем здесь подчеркиваются принципы и методология, а не какое-либо конкретное применение. Хотя эта книга более современна и обширна, она во многом основана на предыдущей книге автора «Сейсмические волны: излучение, передача и затухание», 1965 г. [179]. По существу, желание написать новую книгу появилось в результате все продолжающегося спроса из разных уголков мира на книгу «Сейсмические волны» после того как несколько лет тому назад это издание полностью разошлось.

Многие результаты, изложенные здесь, были получены в течение двух десятилетий исследовательской работы и десяти лет руководства работами аспирантов.

Принятые обозначения

a_S, a_P — коэффициенты затухания волн
A, A_I, B, B_I — коэффициенты Фурье
b — радиус
c, c_P и др. — фазовые скорости волн
C_{11}, C_{12} и др. — упругие константы
D_{11}, D_{12} и др. — элементы матриц
e_{xx}, e_{yz} и др. — деформации
E_{xx}, E_{xy} и др. — преобразование Фурье деформации
E — модуль Юнга, плотность энергии
f — частота
$f(t)$, $F(\omega)$ — форма волны в источнике и ее преобразование Фурье
F — упругая константа (сила)
$g(z)$, $G(z)$ — пространственное распределение источника и его спектр
G — сила (комплексная константа)
$H^{(1)}_0(x)$, $H^{(1)}_1(x)$ — функция Ханкеля
I_x, I_y и др. — интенсивность
$I_0(z)$, $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя
$J_0(x)$, $J_1(x)$ — функции Бесселя
k — модуль всестороннего сжатия (объемный модуль)
k, $\bar{k}$, l, m, $\bar{m}$ — волновое число
K, L — комплексная константа
$K_0(z)$, $K_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя
M — модуль плоского деформирования
N — модуль, характеризующий распространение волны в пластине
$N_0(x)$, $N_1(x)$ — функции Бесселя
p, $\bar{p}$ — давление
$p_{x,x}$, $p_{z\theta}$ P_{xx}, P_z — компоненты напряжения и их спектры
Ω_S, Ω_P — параметры затухания
r — цилиндрическая или сферическая координата
R — коэффициент отражения
u_x, u_θ, U_x, U_θ — компоненты смещения и их спектры
v_x, v_r — скорости движения частиц
V_P, V_S — скорость распространения энергии
W, W_s — плотность энергии
x, y, z — прямоугольные координаты
Z — импеданс, комплексная переменная
α, β — скорости соответственно продольных и поперечных волн
γ_x, γ_P, δ, Γ_E, Γ_M — углы

γ, Γ — потенциал смещения и его спектр
δ_S, δ_P — декремент затухания волн
Δ — приращение
η — вязкость жидкости
η_1, η_2 — удельный объем
θ — цилиндрическая или сферическая координата
θ_P, θ_S — фазовый угол
$\varkappa$ — проницаемость
λ — параметр Ламе
μ — модуль сдвига
λ', λ^*, μ', μ^* — параметры, характеризующие потери энергии
ν — коэффициент Пуассона
ρ, ρ_f — плотность
τ — время распространения волны
Φ — потенциал смещения, сферическая координата, вязкость
χ, X — потенциал смещения и его спектр
ψ_x, ψ_y, ψ_z, Ψ_x, ... — потенциалы векторов смещения и их спектры
ω — угловая частота
Ω — комплексная угловая частота

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

ЗАДАЧИ И ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Сейсмические волны давно служат предметом изучения и область их применения расширяется. Землетрясения возбуждают волны в грандиознейших масштабах; причем поверхностные волны наблюдаются и после того, как они несколько раз обходят вокруг Земли. Их систематическое изучение имеет большое значение для обеспечения безопасности населения, а также для научного исследования строения и эволюции Земли. Источником естественного шума или микросейсм часто являются шумы на море. Искусственно возбуждаемые сейсмические волны дают информацию о конфигурации слоев в породах для нефтяной разведки и в меньшем масштабе информацию о прочности ее поверхностных слоев для инженерных целей. Свойства пород, вскрываемых нефтяными скважинами, определяются путем регистрации сейсмических волн на разных глубинах при возбуждении их взрывами либо другими источниками, расположенными в той же скважине поблизости от приемника. Приборы, созданные для регистрации землетрясений и больших взрывов, нередко помещаются в специальные контейнеры и опускаются в глубокую скважину. В каждой из упомянутых областей применения сейсмических волн следует изучать направленность и эффективность источников, волновые характеристики отдельных слоев и границ, так как все эти параметры видоизменяют волну в процессе ее распространения и взаимодействия с приемником. Эти процессы могут быть поняты только тогда, когда зарегистрированные сигналы будут должным образом истолкованы в терминах истинного движения грунта в области приемника.

В книге рассмотрены теоретические и экспериментальные методы, освещающие главные аспекты этих проблем.

Первый аспект — это поиски подходящих моделей горных пород. На эту тему имеется значительное количество публикаций о распространении волн в зернистых и пористых средах, в которых интегральные свойства выражаются через характеристики составляющих ее частей. При этом механизм затухания волн в зернистых и пористых средах раскрывается с трудом. Экспериментальные данные рассматриваются для всех типов горных пород, при этом уравнения распространения волн в поглощающих средах являются общими. Тонкослоистая среда также рассматривается в качестве некой модели в применении к геологической среде, составленной из множества отдельных слоев, толщина которых мала по сравнению с преобладающими длинами волн. Меньше внимания уделяется слоистым моделям среды, состоящим из толстых слоев,

поскольку распространение упругих волн в таких средах очень подробно рассмотрено в литературе.

Второй аспект касается волн вблизи цилиндрических полостей, поскольку любые измерения во внутренних точках среды требуют бурения скважины: при этом очень редко скважинное пространство заполняется таким веществом, чтобы можно было считать среду не нарушенной. В реальных условиях необходимо учитывать влияние скважины на процесс регистрации, приводя последний к условиям, имитирующим измерение в среде в ее начальном состоянии. Одновременное расположение источника и приемника в скважине, заполненной жидкостью, представляет собой модель акустического каротажа, имеющего широкое практическое применение. В этой ситуации наблюдаемый сигнал в сильной степени зависит от размера скважины, расстояния между источником и приемником, свойств жидкости и свойств окружающей твердой среды.

Возбуждение упругих волн рассматривается вначале с наиболее элементарного источника, а именно с точечных сосредоточенных сил, действующих в однородной среде. На основе изучения волновых полей от таких простых источников рассматривается задача излучения волн, когда силы приложены к цилиндрическим, сферическим и плоским границам. Для расчета некоторых более сложных источников используется принцип взаимности. При излучении волн точечным источником, действующим в поперечно-изотропной среде, возможны регистрация нескольких вступлений S-волны и появление каустик. Коротко обсуждаются характеристики некоторых устройств, возбуждающих сейсмические волны применительно к упрощенным математическим моделям источников. Аналогичным образом рассматриваются вопросы, относящиеся к регистрации волн. Предполагается, что такие характеристики волн, как скорость движения частиц, напряжение или дилатация, могут быть в принципе измерены. Поэтому приводятся некоторые эксперименты, в которых были сделаны попытки измерить указанные параметры существующими датчиками.

Чтобы не повторять материал, уже изложенный в разных учебниках, определения и вводимые понятия включались только в той степени, в какой они были необходимы в процессе обсуждения основных результатов. Определения напряжений и деформаций служат лишь для установления терминологии, но предполагается, что более полное изложение закона Гука можно при необходимости найти в других работах. Вывод векторного волнового уравнения и обоснование возможности использования скалярного и векторного потенциалов даны без должного обоснования, но эти моменты не существенны для основной темы книги и они хорошо освещены в другой литературе [95, 120]. Рассмотрение плоских волн в однородных средах приводится для того, чтобы обеспечить основу для расчета упругих констант зернистых и пористых сред и для оценки комплексных констант распространения волн в поглощающих средах. Подобным же образом рассмотрение плоских волн вблизи сво-

бодной границы и вблизи границы жидкость — твердое тело позволяет провести аналогию с коническими волнами вдоль скважины, пустой, либо заполненной жидкостью. Поэтому система координат и конкретные модели были выбраны так, чтобы подчеркнуть это сходство. Рассмотрение плоских волн — необходимый подготовительный этап перед обсуждением вопросов распространения волн в однородных средах и волн вдоль цилиндрических границ.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И СВЕРТКА

Предполагается, что читатель достаточно знаком с некоторыми математическими соотношениями, которые используются в тексте без вывода. Они сопровождаются соответствующими ссылками, чтобы иметь возможность при необходимости изучить тот или иной вопрос детально.

Преобразование Фурье

Согласно интегралу Фурье любая функция времени $f(t)$, представляющая собой переходный процесс, в частности сейсмический сигнал, может быть выражен через функцию угловой частоты $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt,$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \quad (1.1)$$

Эквивалентность между этими двумя представлениями обозначается символами $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$. Хотя с математической точки зрения это не обязательно, будем считать $f(t)$ вещественной функцией времени. Комплексная функция $F(\omega)$ может быть представлена своими действительной и мнимой частями или выражена через амплитуды и фазовый угол:

$$F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega) = A(\omega)\, e^{i\theta(\omega)}. \quad (1.2)$$

Амплитудные и фазовые спектры простого импульса (отрезка синусоиды) представлены на рис. 1.1. Видно, что амплитудный спектр имеет четную симметрию $[A(-\omega)=A(\omega)]$, а фазовый — нечетную $[\theta(-\omega)=-\theta(\omega)]$. Иначе говоря, $F(-\omega)$ — комплексная сопряженная функция по отношению к $F(\omega)$, что справедливо для любой вещественной функции $f(t)$ [115].

Вещественная функция некоторой другой вещественной пере-

менной, как, например, расстояние вдоль оси z, тоже может быть выражена через преобразование Фурье:

$$
\begin{aligned}
G(l) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z)\, e^{-ilz}\, dz, \\
g(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(l)\, e^{ilz}\, dl.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Символ $g(z) \leftrightarrow G(l)$ вновь обозначает пару преобразований Фурье.

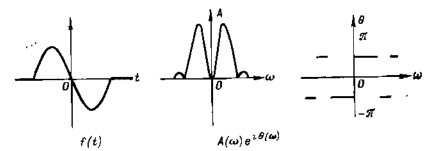


Рис. 1.1. Простой импульс и его преобразование Фурье

ТАБЛИЦА 1.1
НЕКОТОРЫЕ ПАРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1
$-1/\pi t$	$i \operatorname{sgn} \omega$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$i\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
$\sin \omega_0 t/t$	$\pi[U(\omega+\omega_0)-U(\omega-\omega_0)]$
$T_0/(T_0^2+t^2)$	$\pi \exp(-T_0\lvert\omega\rvert)$
$\exp(-[t/2T_0]^2)/2T_0$	$\sqrt{\pi} \exp(-[\omega T_0]^2)$

Для удобства читателей несколько пар преобразований Фурье приведены в табл. 1.1. Каждая из этих пар используется в соответствующих разделах книги.

При рассмотрении проходящих волн мы имеем дело с функция-

ми, одновременно зависящими от z и t. Они могут быть представлены при помощи двойного преобразования Фурье:

$$Q(l, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(z, t)\, e^{-ilz}\, e^{-i\omega t}\, dz\, dt,$$

$$q(z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(l, \omega)\, e^{ilz}\, e^{i\omega t}\, dl\, d\omega. \tag{1.4}$$

Такая пара преобразований может быть обозначена как $q(z, t) \overset{\leftrightarrow}{\leftrightarrow}$

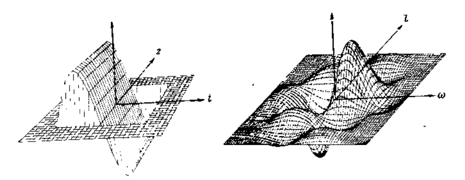


Рис. 1.2. Пример двойного преобразования Фурье (справа приведена мнимая часть; вещественная часть равна нулю)

$\overset{\leftrightarrow}{\leftrightarrow}$ $Q(l, \omega)$. Простой пример изображен на рис. 1.2. В этом случае $q(z, t) = f(t)g(z)$, где $f(t)$ — есть один период синусоиды, а $g(z)$ — прямоугольное окно с центром в начале координат.

Свертка

Второе важное понятие — свертка. Свертка (конволюция) двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, обозначаемая $f_1(t) * f_2(t)$, определяется интегралом:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau)\, d\tau. \tag{1.5}$$

Графически процесс свертки представлен на рис. 1.3. На рис. 1.3, *а*, *б* даны две функции. На рис. 1.3, *в* первая из функций приведена в зависимости от переменной интегрирования τ, другая функция смещена влево на величину t и перевернута во времени. Для данного временного сдвига t произведение обеих функций интегрируется на интервале времени, на котором они перекрываются. В результате получим одно значение на кривой, приведенной на

рис. 1.3, *г*. Смысл свертки можно сделать еще более ясным, приведя эквивалентное выражение **в частотной области:**

$$f_1(t) \ast f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega)\, F_2(\omega). \qquad (1.6)$$

Это соотношение изображено на рис. 1.4, из которого следует, что сигнал, полученный в результате свертки двух функций, мог бы быть получен через обратное преобразование Фурье как произведение спектров обеих функций. Необходимость в таких расчетах часто возникает в ситуациях, когда сигнал преобразуется при **прохождении через ту или иную линейную среду. При этом желательно определять выходной сигнал для любого заданного входно-**

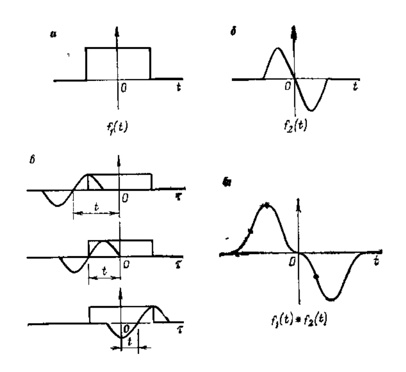


Рис. 1.3. **Графическая схема процесса свертки**

го сигнала. Пусть $F_1(\omega)$ представляет собой частотную характеристику линейной среды, выражающую амплитуду и фазу колебаний на выходе при условии, что входной сигнал является косинусоидальной функцией времени. Спектр входного импульса обозначим через $F_2(\omega)$. После прохождения его через среду спектр сигнала будет равен произведению спектров $F_1(\omega)F_2(\omega)$. Форму волны на выходе при любом входном воздействии $f_2(t)$ можно полу-

чить также с помощью свертки при условии, что функция $f_1(t)$, описывающая линейную среду, известна. Эта функция, которую принято называть импульсной характеристикой (или импульсной реакцией) линейной системы, будет введена в следующем разделе.

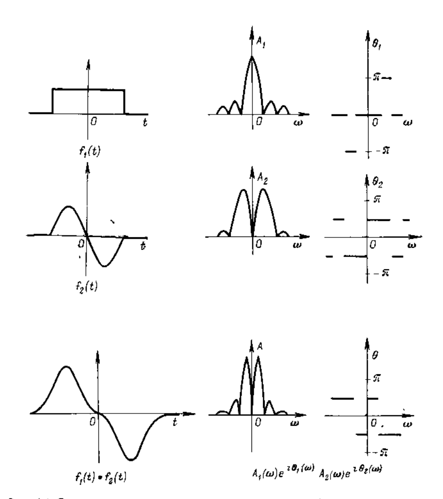


Рис. 1.4. Эквивалентность свертки и произведения преобразований Фурье

Обобщенные функции

Рассмотрим понятие распределения [115]. В частности, будем использовать свойства дельта-функции или импульсной функции и ее производных. Существенным моментом является то, что $\delta(t)$-обобщенная функция или распределение не может быть описано в тер-

минах, применяемых к обычным функциям. Дельта-функция определяется через любую обычную функцию $f(t)$ интегралом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0). \qquad (1.7)$$

Частотное представление $\delta(t)$-функции имеет единичную амплитуду и нулевой фазовый угол на всех частотах (рис. 1.5, *а*). Это как раз тот тип входного воздействия, который предполагался при определении частотной характеристики системы $F_1(\omega)$. Произве-

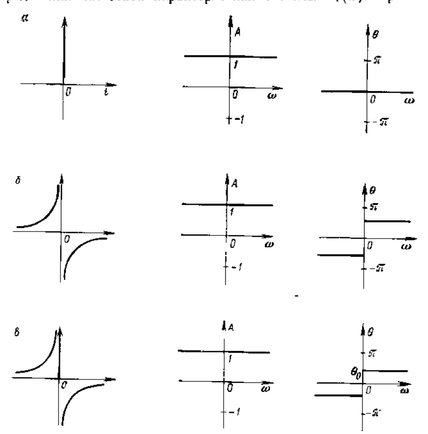


Рис. 1.5. Временное представление, амплитудные и фазовые характеристики трех распределений

а — обобщенные функции: $\delta(t)$, *б* — $[-\pi t]^{-1}$, *в* — $\cos\theta_0\delta(t)+\sin\theta_0[-\pi t]^{-1}$

дение частотного независимого входного спектра с $F_1(\omega)$ эквивалентно свертке

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = f_1(t). \qquad (1.8)$$

Если отклик линейной среды на дельта-функцию найден математически или экспериментально, реакция на любой другой входной нестационарный сигнал $f_2(t)$ может быть получена путем свертки $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$. Хотя дифференцирование в обычном смысле неприменимо к $\delta(t)$, производные $\delta(t)$ определяются по формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} \delta(t-\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^n(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau = f^n(t), \tag{1.9}$$

где индекс n означает n-ю производную.

Другим распределением, которое имеет отношение к распространению нестационарных волн, является обобщенная функция $[-\pi t]^{-1}$. Преобразование Фурье этого распределения показано на рис. 1.5, *б*. В данном случае амплитуда не зависит от частоты, а значение фазы, равное $\pi/2$, тоже одинаково для всех частот, за исключением разрывного изменения знака фазы при $\omega=0$. Таким образом, функция $[-\pi t]^{-1}$ «родственна» функции $\delta(t)$. Как и в случае дельта-функции $[-\pi t]^{-1}$ можно определить при помощи интеграла, содержащего обычную функцию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, [-\pi t]^{-1}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \ln |t|\, dt. \tag{1.10}$$

Штрих при $f(t)$ означает дифференцирование. Несобственный интеграл в правой части существует и служит для определения выражения в левой части. Свертка функции $f(t)$ с распределением $[-\pi t]^{-1}$ дает модифицированную волновую форму

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, [-\pi (t-\tau)]^{-1}\, d\tau = [f(t)]_{\pi/2}. \tag{1.11}$$

Это соотношение известно как преобразование Гильберта. Функции $[f(t)]_{\pi/2}$ и $f(t)$ представляют пару преобразований Гильберта [115]. Чтобы получить фазовый сдвиг на любую величину θ_0, независимую от частоты, без изменения спектральных амплитуд необходимо скомбинировать оба распределения в соответствующей пропорции и положить

$$[f(t)]_{\theta_0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \{\delta(t-\tau) \cos\theta_0 + [-\pi(t-\tau)]^{-1} \times$$
$$\times \sin\theta_0\}\, d\tau = f(t) \cos\theta_0 + [f(t)]_{\pi/2} \sin\theta_0. \tag{1.12}$$

Это соотношение применимо к различным задачам. Например, при падении вертикально поляризованной поперечной волны, имеющей форму сигнала $f(t)$, возникает отраженная волна, форма которой при углах падения, больших критического, совпадает с $[f(t)]_{\theta_0}$. Таким образом, отраженный сигнал является взвешенной суммой падающего сигнала и его преобразования Гильберта.

Глава 2

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ И ПЛОСКИЕ ГРАНИЦЫ

БЕЗГРАНИЧНАЯ ИЗОТРОПНАЯ СРЕДА

При рассмотрении процесса распространения сейсмических волн в земле принято реальную среду заменять идеализированной моделью однородного изотропного упругого тела. *Однородность* означает, что исследуемый материал имеет одинаковые свойства на всем протяжении и что малый элемент данного вещества, представляющий для нас интерес, обладает в среднем свойствами, типичными для любого другого элемента. *Изотропность* свидетельствует о независимости свойств исследуемого материала от направления. *Упругость* указывает на то, что, хотя материал может смещаться и деформироваться под воздействием прилагаемых сил, каждая точка среды вернется в исходное положение, как только эти силы перестанут действовать. Рассмотрим поведение волн, распространяющихся в таких средах, и отметим некоторые простые свойства этих волн.

Смещения и деформации

В прямоугольных координатах x, y и z смещение u некоторой точки от ее исходного положения характеризуется тремя компонентами u_x, u_y, u_z, отвечающими трем координатным направлениям соответственно. На рис. 2,1,*а* рассматриваемая точка показана в начале координат, а элементарный объем среды взят в виде куба со сторонами Δx, Δy и Δz. Поскольку элементарный куб принимает участие в движении, он может претерпевать перемещение и вращение, а также изменение формы или деформацию. Рассмотрим кратко величины, которые используются для описания изменений формы.

Предположим (рис. 2.1,*б*), что движение происходит только в направлении оси x и что u_x зависит только от x. Поскольку движение u не зависит от z, достаточно изобразить одну только переднюю грань куба. Когда левый конец смещается на расстояние u_x, правый конец передвигается на расстояние $[u_x+(\partial u_x/\partial x)\Delta x]$, а длина нижнего ребра изменяется на величину $(\partial u_x/\partial x)\Delta x$. Относительное удлинение $\partial u_x/\partial x$ является одним из фундаментальных типов деформации. Такая деформация называется *простым удлинением* и обозначается e_{xx}. Подобным образом определяются e_{yy} и e_{zz}.

На рис. 2.1,*в* величина u_x снова берется в качестве единственной компоненты движения, но в данном случае зависит только

от y. Степень изменения квадратной грани на ромбовидную определяется углом между левым краем и линией, перпендикулярной к нижнему краю. Поскольку этот угол очень мал, он выражается через отношение горизонтального смещения $(\partial u_x/\partial y)\Delta y$ к вертикальному расстоянию Δy, т. е. равен $\partial u_x/\partial y$. Движение, изображенное на рис. 2.1, *в*, отображает скольжение слоев, которое началось параллельно плоскости xz и оставалось таким в течение всего движения. Этот тип деформации называется *простым сдвигом*. Эту же форму можно получить другим путем — вращением куба по часовой стрелке на угол $[(-\partial u_x/\partial y)/2]$ и затем деформацией

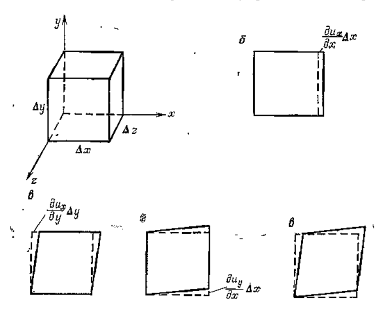


Рис. 2.1. Типы деформаций

а — недеформированное состояние; *б* — простое растяжение; *в*, *г* — простой сдвиг; *е* — чистый сдвиг

его симметрично путем растяжения вдоль одной диагонали и сжатия вдоль другой. На рис. 2.1,*г* показан другой пример простого сдвига, в котором все перемещения происходят по вертикали. Угол, который характеризует отклонение от квадрата, равен $\partial u_y/\partial x$, а вращение происходит против часовой стрелки на угол $(\partial u_y/\partial x)/2$. Понятно, что если присутствуют оба движения, то сдвиговые деформации складываются, а вращательные вычитаются. *Чистый сдвиг* показан на рис. 2.1, *д*, где соответствующие частные производные равны и вращение отсутствует. Независимо от наличия вращения мерой сдвиговой деформации служит сумма двух частных производных $\partial u_x/\partial y+\partial u_y/\partial x$, которая обозначается символом e_{xy}. Подобным же образом e_{yz} и e_{zx} представляют собой деформации сдвига в двух других плоскостях. Заметим, что $e_{yx}=e_{xy}$, $e_{yz}=e_{zy}$ и $e_{xz}=e_{zx}$.

Шесть компонент деформации в терминах смещений имеют вид[1]

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ e_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad e_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ e_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Напряжения

Деформации в упругом теле появляются как реакция на силы, распределенные по всему телу и меняющиеся во времени и в пространстве. Понятия, используемые для описания этих сил, лучше всего могут быть обсуждены также на примере элементарного куба (рис. 2.2). Поверхностные силы прилагаются к граням куба со стороны окружающей среды. Поверхностная сила, приложенная к определенной грани, является вектором и изображена на рис. 2.2, *а* жирной стрелкой. Компоненты силы вдоль трех осей показаны более тонкими стрелками. Приложенная сила действует равномерно на всю грань. Отношение силы к единичной площади представляет собой напряжение. На каждой грани куба имеются напряжение, нормальное по отношению к поверхности, и два касательных напряжения. Совокупность этих сил полностью описывает напряжения, действующие на грани элементарного куба. В используемых ниже обозначениях p_{xx}, p_{xy} и т. д. первый индекс обозначает направление силы, а второй — плоскость, к которой она приложена.

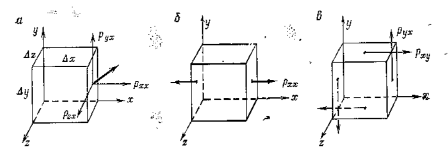


Рис. 2.2. Типы напряжений

[1] Многие авторы используют определение $e_{xy} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)/2$ и т. д. таким образом, что компоненты деформации могут корректно использоваться в качестве тензора, что дает возможность манипулировать ими как составляющими тензора.

Пример *нормального напряжения* вдоль оси x показан на рис. 2.2, *б*. Утверждение о том, что p_{xx} существует в точке, означает, что к правой грани приложена сила, действующая в положительном направлении оси x, а на левую грань действует такая же сила в противоположном направлении. Понятно, что эти две силы должны достичь равенства по мере того, как интервал Δx уменьшается, поскольку любая конечная сила, прилагаемая к бесконечно малой массе, приведет к бесконечному ускорению. Подобным образом p_{yy} и p_{zz} обозначают нормальные напряжения вдоль осей y и z. Нормальное напряжение положительно, когда силы направлены во вне таким образом, чтобы вызвать положительное растяжение.

Определение *касательного напряжения* связано с более сложной комбинацией сил, показанной на рис. 2.2, *в*. Как только компонента напряжения p_{yx} начинает действовать на правой грани элементарного куба, то для того чтобы избежать бесконечного ускорения, на левой грани должно возникнуть равное по величине и противоположное по знаку напряжение. Пара сил, обусловленная этими напряжениями, должна быть уравновешена равной и противоположной по направлению парой сил на верхней и нижней гранях. При этом требуется, чтобы $p_{yx}=p_{xy}$. Следовательно, когда компонента напряжения p_{yx} существует в некоторой точке среды, в этой же точке должны быть определены все другие компоненты напряжения, чтобы вызвать чистый сдвиг.

Связь между напряжениями и деформациями

Тот факт, что напряжения, действующие на элементарный объем твердого тела, могут быть выражены в виде линейной комбинации деформаций, был установлен экспериментально для многих веществ в семнадцатом столетии; эта связь известна как закон Гука. Для изотропного твердого тела все константы пропорциональности могут быть выражены через два упругих модуля. Хотя модуль Юнга и коэффициент Пуассона — общепринятые упругие константы, здесь будут использованы коэффициенты Ламе λ и μ. Для изотропного тела связь между напряжением и деформацией имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= (\lambda+2\mu)\,e_{xx}+\lambda e_{yy}+\lambda e_{zz},\\ p_{yy} &= \lambda e_{xx}+(\lambda+2\mu)\,e_{yy}+\lambda e_{zz},\\ p_{zz} &= \lambda e_{xx}+\lambda e_{yy}+(\lambda+2\mu)\,e_{zz},\\ p_{xy} &= \mu e_{xy},\quad p_{yz}=\mu e_{yz},\quad p_{zx}=\mu e_{zx}. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Уравнения движения

При определении напряжения силы, действующие в некоторой точке, предполагались постоянными во всем элементарном объеме. Чтобы выразить изменение напряжения между соседними точками, достаточно учесть величину, зависящую линейно от расстояния

между точками (рис. 2.3). Очевидно, в этом приближении поверхностные силы, действующие на гранях элементарного объема, точно не уравновешены. Для достижения равновесия необходимо добавить массовые силы, которые вызывают ускорение элементарного объема.

На рис. 2.3 показаны только те силы, которые действуют в направлении оси x. Сумма этих поверхностных сил

$$\left(p_{xx}+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\Delta x-p_{xx}\right)\Delta y\,\Delta z+\left(p_{xy}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}\Delta y-\right.$$
$$\left.-p_{xy}\right)\Delta x\,\Delta z+\left(p_{zx}-\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\Delta z-p_{zx}\right)\Delta x\,\Delta y=$$
$$=\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Помимо поверхностных сил в среде могут существовать силы, действующие на весь элементарный объем. Например, гравитаци-

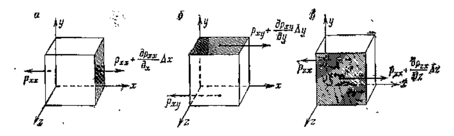


Рис. 2.3. Поверхностные силы, действующие параллельно оси x

онная сила пропорциональна произведению плотности на элементарный объем. Магнитные поля могут воздействовать на некоторые материалы, возбуждая объемные силы. Соответствующим образом сконструированный датчик может рассматриваться как небольшой объем упругой среды, способный генерировать объемные силы в ответ на электрические сигналы. В любом таком случае необходимо учитывать силу, действующую на единицу объема с компонентами G_x, G_y и G_z; ее значение в направлении оси x равно $G_x\Delta x\Delta y\Delta z$. Приравнивая сумму всех сил произведению массы на ускорение вдоль каждой из трех осей, получим уравнения изотропной среды:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}+G_x=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial z}+G_y=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial p_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}+G_z=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.
\end{aligned}\right\}\qquad(2.3)$$

Равенства (2.2) можно продифференцировать и подставить в уравнения движения для исключения напряжений. Если массовые силы приравнять нулю, то уравнения движения, выраженные через смещения частиц, будут иметь вид

$$
\left.
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\\
&+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\,\partial z}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},\\
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)+\\
&+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y\,\partial z}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2},\\
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)+\\
&+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\,\partial z}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.4}
$$

Некоторые простые решения

Прежде чем рассмотреть общее решение уравнений (2.4), приведем два очень простых примера для иллюстрации основных характеристик плоских упругих волн в безграничной среде.

Во-первых, предположим, что смещение параллельно оси x (тогда $u_y=u_z=0$) и что u_x не зависит от y и z. Тогда система (2.4) сводится к одному простому уравнению

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \tag{2.5}$$

Это уравнение имеет решение

$$u_x=f\left(t-\frac{x}{\alpha}\right)+g\left(t+\frac{x}{\alpha}\right),$$

где $\alpha=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$. Каждое слагаемое описывает волну произвольной формы. Предположим, что $f(t)$ представляет собой простой импульс, выражающий смещение в точке $x=0$. Для любого положительного x функция $f(t-x/\alpha)$ выражает такой же импульс, но с задержкой во времени на x/α. Чем больше значение x, тем больше запаздывание, с константой пропорциональности $1/\alpha$. Таким образом, $f(t-x/\alpha)$ представляет волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x со скоростью α, равной скорости продольных волн. Подобным образом $g(t+x/\alpha)$ описывает волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси x. Следует отметить, что функция $f(t-x/\alpha)$ может описывать стационарную монохроматическую волну $e^{i\omega(t-x/\alpha)}$.

При распространении волны в положительном направлении оси выполняются следующие соотношения:

$$
\left.\begin{aligned}
u_x &= f\left(t-\frac{x}{\alpha}\right),\\
e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha} f'\left(t-\frac{x}{\alpha}\right),\\
v_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} = f'\left(t-\frac{x}{\alpha}\right),\\
p_{xx} &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\rho\alpha f'\left(t-\frac{x}{\alpha}\right),\\
p_{yy} &= \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\alpha} f'\left(t-\frac{x}{\alpha}\right),\\
p_{zz} &= \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\alpha} f'\left(t-\frac{x}{\alpha}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.6)
$$

Здесь штрих указывает на дифференцирование по переменной, совпадающей с выражением в скобках.

Уравнение (2.6) показывает, что для плоской волны сжатия деформация, скорость движения частиц и напряжение имеют одну и ту же пространственно-временную зависимость и связаны между собой прямой пропорциональностью:

$$p_{xx} = \rho\alpha^2 e_{xx}, \quad p_{xx} = -\rho\alpha v_x. \qquad (2.7)$$

Необходимо также отметить, что деформация, сопровождающая плоскую продольную волну, является простым растяжением, показанным на рис. 2.1, *б*, и нормальные напряжения p_{yy} и p_{zz} имеют такую величину, которая предотвращает любое боковое сжатие элемента, подвергаемого нормальному напряжению p_{xx} в направлении распространения волны.

Интересно рассмотреть поток энергии такого рода в плоской волне. Поскольку работа — это произведение силы и смещения, а u_x в данном случае единственная компонента смещения, то поток энергии параллелен оси x. Скорость (быстроту) потока энергии, распространяющуюся через единицу площади, назовем *интенсивностью*. Если p_{xx} для некоторого значения x_0 положительно, то сила, приходящаяся на единицу площади на плоской границе полупространства $x > x_0$, действует в отрицательном направлении x, в то время как положительное значение v_x указывает на движение в положительном направлении x. Если необходимо, чтобы интенсивность I_x в положительном направлении оси x была больше нуля, то ее следует определять по формуле

$$I_x = -p_{xx}v_x = \rho\alpha[f'(t-x/\alpha)]^2. \qquad (2.8)$$

Плотность энергии E определяется как сумма кинетической и потенциальной энергий в единице объема. Для элементарного куба объемом $\rho\Delta x\Delta y\Delta z$ и массой $\rho\Delta x\Delta y\Delta z$ кинетическая энергия, отнесенная к единице объема, равна $\rho v_x^2/2$. С учетом (2.6) ее мож-

но записать как $\rho[f'(t-x/\alpha]^2/2$. Рассматривая тот же элементарный куб как пружину, растянутую на расстояние $e_{xx}\Delta x$ силой $p_{xx}\Delta y\Delta z$, получим потенциальную энергию на единицу объема, равную

$$\int p_{xx}de_{xx} = \int \rho\alpha^2 e_{xx}de_{xx} = \rho\alpha^2 e^2_{xx}/2.$$

Используя формулы (2.6), найдем плотность потенциальной энергии, равную $\rho[f'(t-x/\alpha)]^2/2$. Можно показать, что кинетическая и потенциальная энергии в плоской волне в упругой среде всегда равны друг другу [49]. Следовательно, плотность полной энергии

$$E=\rho[f'(t-x/\alpha)]^2. \tag{2.9}$$

Согласно формулам (2.6) любая характерная особенность импульса $f(t)$ перемещается со скоростью α. Эта величина определяет фазовую скорость продольных волн, которую мы будем обозначать символом c_P. Отношение интенсивности I_x к плотности энергии E дает скорость, с которой распространяется энергия. При отсутствии затухания скорость распространения энергии совпадает с групповой скоростью [49]. Обозначив эту скорость через V_P, получим

$$V_P=(I_x/E)=\alpha=c_P. \tag{2.10}$$

На рис. 2.4 приведено сопоставление величин u_x, p_{xx}, v_x и I_x на примере простого импульса смещения.

Второе простое решение уравнений (2.4) может быть получено в случае, когда движение происходит параллельно оси y (u_x и u_z равны нулю), а u_y не зависит от y и z. Тогда система (2.4) сводится к одному волновому уравнению:

$$\mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}. \tag{2.11}$$

Решениями этого уравнения являются волны произвольной формы, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях оси x со скоростью $\beta=\sqrt{\mu/\rho}$. Движение частиц в этом случае перпендикулярно к направлению пробега волны. Снова, переходя к положительному направлению, найдем, что плоская поперечная волна характеризуется следующими величинами:

$$\left.\begin{aligned}
u_y &= f\left(t-\frac{x}{\beta}\right),\\
e_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x}=-\left(\frac{1}{\beta}\right)f'\left(t-\frac{x}{\beta}\right),\\
v_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t}=f'\left(t-\frac{x}{\beta}\right),\\
p_{xy} &= \mu\frac{\partial u_y}{\partial x}=-\rho\beta f'\left(t-\frac{x}{\beta}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Как и в случае с волной сжатия, три параметра волны — деформация, скорость частиц и напряжение пропорциональны друг другу, т. е.

$$p_{xy}=\rho\beta^2 e_{xy}, \quad p_{xy}=-\rho\beta v_y. \qquad (2.13)$$

Деформация, вызванная плоской поперечной волной, является простым сдвигом, как показано на рис. 2.1, *г*. Это означает, что движение любого элемента представляет собой комбинацию вращения и чистого сдвига.

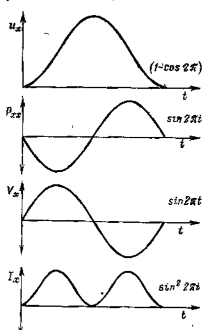


Рис. 2.4. Характеристики плоской продольной волны

Интенсивность поперечной волны также определяется произведением силы на единицу площади и скорости движения частиц. Хотя и сила и скорость частиц параллельны оси y, поток энергии в плоскостях $x>x_0$ происходит в положительном направлении оси x:

$$I_x=-p_{xy}v_y=\rho\beta[f'(t-x/\beta)]^2. \qquad (2.14)$$

Групповая скорость, плотность энергии и фазовая скорость связаны следующим образом:

$$V_S=(I_x/E)=\beta=c_S. \qquad (2.15)$$

Приведенные выше соотношения между напряжением, деформацией и смещением для плоских продольных и поперечных волн будут использованы в следующей главе для расчета средних упругих констант зернистых и пористых сред и в гл. 5 при рассмотрении взаимодействия плоских волн с цилиндром, заполненным жидкостью.

Потенциалы смещения

Уравнения движения могут быть решены в более общем виде с помощью потенциалов смещения. Простой подстановкой можно проверить, что, если имеется скалярный потенциал Φ, такой, что $u_x=\partial\Phi/\partial x$, $u_y=\partial\Phi/\partial y$ и $u_z=\partial\Phi/\partial z$, то смещения будут удовлетворять уравнениям (2.4) при условии, что Φ удовлетворяет волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \qquad (2.16)$$

Если Φ не зависит от y и z, то решением уравнения (2.16) будет:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi = f\left(t - \frac{x}{\alpha}\right), \\ &u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha} f'\left(t - \frac{x}{\alpha}\right), \\ &u_y = u_z = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2.17)$$

Это решение определяет продольную волну, пробегающую вдоль положительной оси x, и величины, фигурирующие в уравнениях (2.6), могут быть выражены через Φ. Решение уравнения (2.16), которое описывает плоскую продольную волну, проходящую в произвольном направлении, записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi = f\left(t - \frac{x \cos\gamma_x + y\cos\gamma_y + z\cos\gamma_z}{\alpha}\right), \\ &u_x = -\frac{\cos\gamma_x}{\alpha} f'\left(t - \frac{x \cos\gamma_x + y\cos\gamma_y + z\cos\gamma_z}{\alpha}\right), \\ &u_y = -\frac{\cos\gamma_y}{\alpha} f'\left(t - \frac{x \cos\gamma_x + y\cos\gamma_y + z\cos\gamma_z}{\alpha}\right), \\ &u_z = -\frac{\cos\gamma_z}{\alpha} f'\left(t - \frac{x \cos\gamma_x + y\cos\gamma_y + z\cos\gamma_z}{\alpha}\right), \end{aligned}\right\} \quad (2.18)$$

где γ_x, γ_y и γ_z — углы между направлением распространения волны и тремя осями координат соответственно. Три компоненты движения частиц u_x, u_y и u_z являются компонентами вектора смещения, направление которого совпадает с направлением распространения волны. Фактически, все замечания, которые были сделаны относительно уравнений (2.6), годятся и для решения в потенциалах, если направление распространения плоской волны принять за ось x.

Прямой подстановкой в (2.4) можно установить следующие соотношения между смещениями и тремя компонентами векторного потенциала ψ_x, ψ_y и ψ_z:

$$\left.\begin{aligned} &u_x = \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, \\ &u_y = \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x}, \\ &u_z = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y}, \\ &\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \quad (2.19)$$

Если ψ_x и ψ_y положить равным нулю, а ψ_z считать независимой от y и z, то решением уравнений (2.4) будет плоская поперечная волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x:

$$\psi_z = f\left(t - \frac{x}{\beta}\right),$$
$$u_y = -\frac{\partial \psi_z}{\partial x} = \frac{1}{\beta} f'\left(t - \frac{x}{\beta}\right). \tag{2.20}$$

Все замечания, сделанные для уравнений (2.12), применимы и в данном случае. Векторный потенциал поперечной волны имеет единственную компоненту, перпендикулярную как к направлению распространения волны, так и к направлению смещения частиц и пропорциональную скалярной функции $f(t-x/\beta)$. Ясно, что плоская поперечная волна, распространяющаяся в произвольном направлении, должна подобным же образом зависеть от единственного вектора, перпендикулярного к направлению распространения волны, направлению смещения частиц и пропорционального функции

$$f[t-(x\cos\gamma_x+y\cos\gamma_y+z\cos\gamma_z)/\beta].$$

Компоненты ψ_x, ψ_y и ψ_z этого вектора не независимы. Один из способов убедиться в их совместности состоит в том, чтобы вывести их из двух скалярных функций X и γ [107] на основе соотношений:

$$\psi_x=\partial\gamma/\partial y, \quad \psi_y=-\partial\gamma/\partial x, \quad \psi_z=X,$$

где

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}=\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}=\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}. \tag{2.21}$$

Отсюда вытекает, что три компоненты смещения u_x, u_y и u_z могут быть описаны комбинацией скалярного и векторного потенциалов[1], выражаемых через три скалярные функции Φ, γ и X.

Таким образом, скалярные и векторные потенциалы позволяют описывать плоские продольную и поперечную волны любой формы, распространяющиеся в произвольном направлении. Это также относится и к произвольному числу таких волн, распространяющихся одновременно, сумма которых также является решением уравнений движения для изотропно-упругой безграничной среды. Данное положение используется, когда необходимо выбрать комбинацию плоских волн, удовлетворяющую граничным условиям, или описать источник, или удовлетворить какие-то другие требования, предъявляемые к общему решению. В следующем разделе изучаются простейшие ситуации этого типа, а именно, отражение плоской волны от свободной плоской границы.

[1] В оригинале кроме термина «скалярный и векторный потенциалы» используется термин «продольный и поперечный потенциалы» соответственно. (Прим. перев.).

Рассмотрим, как используются потенциалы смещения для описания отражения плоской волны от плоской свободной границы, и выскажем ряд замечаний, которые будут полезны при изучении более сложных явлений. Применив способ разделения переменных к волновым уравнениям в потенциалах, записанных в прямоугольных координатах, найдем, что решение является экспоненциальной функцией пространственных координат и времени. Коэффициенты в экспонентах могут быть вещественными, комплексными либо мнимыми. Первое замечание состоит в том, что хотя некоторые ограничения на эти коэффициенты вытекают непосредственно из требования конечности потенциалов, они должны быть конкретизированы для каждой заданной геометрии границ. Например, некоторые коэффициенты, допустимые для волн в плоской пластине, невозможны в случае упругого полупространства. Второе замечание касается дальнейшего выбора допустимых решений, чтобы выделить падающую волну, являющуюся источником остальных колебаний. Например, выражения, описывающие отражение падающей продольной волны, могут быть получены путем произвольного отбрасывания члена, представляющего падающую поперечную волну. Третье замечание состоит в том, что решения, которые будут получены ниже для спектральных составляющих плоских волн при помощи преобразования Фурье, могут быть использованы для изучения отражений нестационарных (импульсных) сигналов.

Потенциалы, удовлетворяющие граничным условиям

Выберем систему координат, совместив свободную границу с плоскостью yz и направив ось x внутрь упругой среды (рис. 2.5). Заметим, что направление распространения падающей волны и ось x определяют плоскость, в которой лежит и луч отраженной волны. Без потери общности эта плоскость может быть принята за плоскость xz. Поскольку движение частиц для продольной волны происходит в направлении ее распространения, компонента y будет равна нулю, и движение происходит полностью в плоскости xz.

Из соображений симметрии очевидно, что направление распространения поперечной волны, возбуждаемой при падении на границу продольной волны, также будет находиться в плоскости xz. В этой же плоскости должно происходить и движение частиц в поперечной волне. Поэтому можно ограничиться решениями, которые не зависят от y. Поперечные волны с движением частиц в плоскости xz часто называются SV-волнами (поскольку свободная граница, совпадающая с поверхностью Земли, считается горизонтальной). Поперечные волны с движением частиц, параллельным свободной границе (SH-волны), рассматривать не будем.

Высказанные соображения позволяют упростить соотношения,

приведенные выше. Добавив условие отсутствия напряжений на плоскости $x=0$, получим следующую систему соотношений:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}=\frac{1}{\beta^2}\,\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2},\\
&\psi_x=0,\quad \psi_y=-\partial\gamma/\partial x,\quad \psi_z=0,\\
&u_x=\partial\Phi/\partial x-\partial\psi_y/\partial z,\quad u_y=0,\\
&u_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x},\\
&p_{xx}=\rho\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-2\beta^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-2\beta^2\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\,\partial z}\right),\\
&p_{xy}=0,\\
&p_{zx}=\rho\left(2\beta^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}-2\beta^2\frac{\partial^2\psi_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}\right).
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.22}
$$

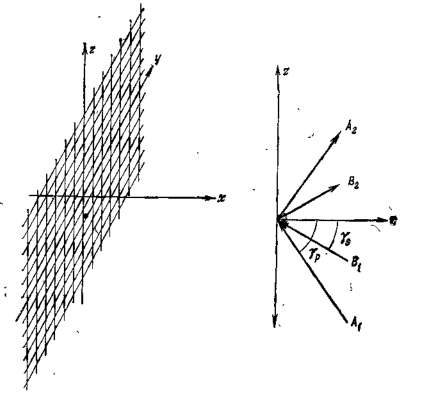


Рис. 2.5. Свободная граница и лучи отраженных от нее волн

Первое из уравнений (2.22) можно решить методом разделения переменных. Для этого положим $\Phi = f_1(x) f_2(z) f_3(t)$. Выполнив это, найдем, что каждая из функций $f_1(x)$, $f_2(z)$ и $f_3(t)$ является экспонентой. Этот метод применим и к потенциалу γ, откуда следует, что величина ψ_y также экспоненциально зависит от x, z и t. Таким образом, решение уравнения (2.22) запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= A_0\, e^{Mx}\, e^{Lz}\, e^{\Omega t}, \\ \psi_y &= B_0\, e^{Kx}\, e^{Lz}\, e^{\Omega t}, \\ M^2 + L^2 &= \Omega^2/\alpha^2, \quad K^2 + L^2 = \Omega^2/\beta^2. \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

До сих пор любые комплексные значения параметров K, L, M и Ω могли считаться допустимыми, если они удовлетворяют последним двум соотношениям. Однако время может изменяться в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и, следовательно, чтобы обеспечить конечность потенциала, величина Ω должна быть чисто мнимой. Положим $\Omega = i\omega$, предполагая, что ω может принимать любые положительные и отрицательные значения. Поскольку координата z в рассматриваемом упругом полупространстве также изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то величина L также должна быть взята чисто мнимой $L = il$, где l принимает любые положительные и отрицательные значения. Так как величины L и Ω чисто мнимые, то M и K должны быть либо вещественными, либо чисто мнимыми, поскольку

$$M^2 = l^2 - \omega^2/\alpha^2, \quad K^2 = l^2 - \omega^2/\beta^2.$$

Если $l^2 < \omega^2/\alpha^2 < \omega^2/\beta^2$, то величины M и K — чисто мнимые. При $\omega^2/\alpha^2 < l^2 < \omega^2/\beta^2$ величина M вещественная, а K мнимая. Если $\omega^2/\beta < l^2$, то M и K вещественные. Эти условия можно компактно представить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} M &= \left(\frac{|a| + a}{2}\right)^{1/2} + i \operatorname{sgn}\omega \left(\frac{|a| - a}{2}\right)^{1/2} = \bar{m} + im, \\ K &= \left(\frac{|b| + b}{2}\right)^{1/2} + i \operatorname{sgn}\omega \left(\frac{|b| - b}{2}\right)^{1/2} = \bar{k} + ik, \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

где $a = l^2 - \omega^2/\alpha^2$ и $b = l^2 - \omega^2/\beta^2$.

Потенциалы, удовлетворяющие волновому уравнению (2.22), могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= (A_1\, e^{Mx} + A_2\, e^{-Mx})\, e^{ilz}\, e^{i\omega t}, \\ \psi_y &= (B_1 e^{Kx} + B_2\, e^{-Kx})\, e^{ilz}\, e^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

Представление потенциалов интегралами Фурье

Коэффициенты A_1, A_2, B_1 и B_2 в уравнении (2.25) зависят от l и ω. При этом сумма любого числа экспоненциальных решений для разных значений l и ω также является решением. В качестве такой суммы можно взять интеграл по всем значениям l и ω:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x, z, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[A_1(l,\omega)\,e^{Mx}+A_2(l,\omega)\,e^{-Mx}]e^{ilz}\,e^{i\omega t}\,dl\,d\omega,\\ \psi_y(x, z, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[B_1(l,\omega)\,e^{Kx}+B_2(l,\omega)\,e^{-Kx}]\,e^{ilz}\,e^{i\omega t}dl\,d\omega.\end{aligned}\right\} \quad (2.26)$$

Таким образом, наши решения оказались записанными в виде преобразования Фурье. Теперь для определения $\Phi(x, z, t)$ и $\psi_x(x, z, t)$ можно воспользоваться таблицами пар преобразований Фурье либо провести интегрирование аналитически или численно. В любом случае взятые в квадратные скобки величины в уравнении (2.26) должны удовлетворять граничным условиям конкретной задачи и представлять преобразование Фурье функцией от x, z и t искомого решения.

Кажущаяся скорость вдоль границы

Переменные z и t фигурируют в уравнении (2.26) только в виде экспонент. Мы видим, что подинтегральное выражение описывает волную, распространяющуюся в направлении z с кажущейся скоростью $c=-\omega/l$:

$$e^{ilz}\,e^{i\omega t} = e^{i\omega(t+lz/\omega)} = e^{i\omega(t-z/c)}.$$

Эта скорость будет одинакова для всех частот, если коэффициенты в (2.26) положить пропорциональными $\delta(l+\omega/c)$, т. е. $A_1(l, \omega)=2\pi A_1(\omega)\delta(l+\omega/c)$ и т. д. Тогда интегрирование по l эквивалентно замене $-\omega/c$ на l и, следовательно, выражения (2.26) запишутся так:

$$\begin{aligned}\Phi(x, z, t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A_1(\omega)\,e^{Mx}+A_2(\omega)\,e^{-Mx}]\,e^{-i\omega z/c}\,e^{i\omega t}\,d\omega,\\ \psi_y(x, z, t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[B_1(\omega)\,e^{Kx}+B_2(\omega)\,e^{-Kx}]\,e^{i\omega z/c}\,e^{-i\omega t}\,d\omega.\end{aligned} \quad (2.27)$$

Отражение от свободной границы

Первый случай, $\beta<\alpha<|c|$. Если скорость вдоль оси больше скорости продольной волны α, то согласно (2.24) $M=i\,\mathrm{sgn}\,\omega(\omega^2/\alpha^2-\omega^2/c^2)^{1/2}=i\omega(1/\alpha^2-1/c^2)^{1/2}$ и первый член в (2.27) пропорциона-

лен $A_1 \exp\{i\omega[t+x(1/\alpha^2-1/c^2)^{1/2}-z/c]\}$. Он выражает продольную волну, распространяющуюся в отрицательном направлении x со скоростью $\alpha/\cos\gamma_P$ и вдоль оси z со скоростью $c=\alpha/\sin\gamma_P$. Поэтому она представляет собой плоскую волну, падающую на границу. Выражение $A_2 \exp\{i\omega[t-x(1/\alpha^2-1/c^2)^{1/2}-z/c]\}$ описывает распространяющуюся от границы волну и может рассматриваться как отраженная продольная волна. Подобным образом B_1 означает амплитуду поперечной волны, падающей под углом $\gamma_S=\sin^{-1}(\beta/c)$, а B_2 — амплитуду отраженной (или обменной) поперечной волны. В этом интервале фазовых кажущихся скоростей потенциал может быть выражен через вещественные значения величин m и k, определяемых согласно (2.24) по формулам:

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A_1 e^{imx}+A_2 e^{-imx}]\, e^{-i\omega z/c}\, e^{i\omega t}\, d\omega,\\ \psi_y &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[B_1 e^{ikx}+B_2 e^{-ikx}]\, e^{-i\omega z/c}\, e^{i\omega t}\, d\omega,\\ m &= \omega\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{c^2}\right)^{1/2}, \quad k=\omega\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{c^2}\right)^{1/2}.\end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

Равенство нулю нормальных и касательных напряжений на границе в соответствии с (2.22) ведет к двум соотношениям, связывающим четыре амплитуды:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{c^2}{\beta^2}-2\right)(A_1+A_2)+2\left(\frac{c^2}{\beta^2}-1\right)^{1/2}(B_1-B_2)=0,\\ &2\left(\frac{c^2}{\alpha^2}-1\right)^{1/2}(A_1-A_2)-\left(\frac{c^2}{\beta^2}-2\right)(B_1+B_2)=0.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Для определения всех амплитуд $A_{1,2}$, $B_{1,2}$ нужно задать еще два уравнения. Возможный логический выбор состоит в том, чтобы приравнять нулю амплитуду падающей поперечной волны ($B_1=0$) и считать амплитуду падающей продольной волны A_1 известной. В результате амплитуда отраженной волны при падении продольных волн на свободную границу определяется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}&\beta<\alpha<|c|, \quad B_1=0,\\ &\frac{A_2}{A_1}=\frac{4(c^2/\alpha^2-1)^{1/2}(c^2/\beta^2-1)^{1/2}-(c^2/\beta^2-2)^2}{4(c^2/\alpha^2-1)^{1/2}(c^2/\beta^2-1)^{1/2}+(c^2/\beta^2-2)^2}=K_1,\\ &\frac{B_2}{A_1}=\frac{4(c^2/\alpha^2-1)^{1/2}(c^2/\beta^2-2)}{4(c^2/\alpha^2-1)^{1/2}(c^2/\beta^2-1)^{1/2}+(c^2/\beta^2-2)^2}=K_2.\end{aligned}\right| \tag{2.30}$$

В этом интервале скоростей заданное значение c соответствует определенному углу падения для продольной волны ($c=\alpha/\sin\gamma_P$) и отличному от него углу поперечных волн ($c=\beta/\sin\gamma_S$).

Альтернативная логическая возможность состоит в устранении падающей продольной волны. В результате получим описание отражения поперечной волны SV от свободной границы:

$$\left.\begin{aligned}
&\beta<\alpha<|c|, \quad A_1=0,\\
&\frac{A_2}{B_1}=-\frac{4\,(c^2/\beta^2-1)^{1/2}\,(c^2/\beta^2-2)}{4\,(c^2/\alpha^2-1)^{1/2}\,(c^2/\beta^2-1)^{1/2}+(c^2/\beta^2-2)^2}=K_3,\\
&\frac{B_2}{B_1}=\frac{4\,(c^2/\alpha^2-1)^{1/2}\,(c^2/\beta^2-1)^{1/2}-(c^2/\beta^2-2)^2}{4\,(c^2/\alpha^2-1)^{1/2}\,(c^2/\beta^2-1)^{1/2}+(c^2/\beta^2-2)^2}=K_4.
\end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

При отражении продольной волны угол падения может варьировать от нуля (нормальное падение, при этом скорость c бесконечна) до $\pi/2$ ($c=\alpha$) (скольжение вдоль границы). При отражении поперечной волны угол падения меняется от нуля до критического значения $\arcsin(\beta/\alpha)$, при котором $c=\alpha$.

Явление отражения нестационарных волн от свободной границы может быть выведено непосредственно из этих же выражений с помощью преобразований Фурье. Пусть функция $f(t)$ выражает форму (зависимость от времени) падающего продольного потенциала в начале координат:

$$\Phi_i(0,0,t)=f(t), \quad f(t)\leftrightarrow F(\omega). \tag{2.32}$$

Согласно первой из формул (2.28):

$$\Phi_i(0,0,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A_1(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{2.33}$$

Отсюда следует, что $A_1(\omega)=F(\omega)$. Тогда согласно (2.30) $A_2=K_1A_1=K_1F(\omega)$. Второе слагаемое в (2.28) является продольной отраженной волной:

$$\Phi_r(x,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_1\,F(\omega)\exp\left\{-i\omega\left[x\Big/\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{c^2}\right)^{1/2}+z/c\right]\right\}e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{2.34}$$

Здесь используется тот факт, что произведение двух функций час-

тоты преобразуется в свертку двух соответствующих функций времени [см. формулу (1.6)]:

$$\left.\begin{aligned} &K_1 F_i(\omega) \leftrightarrow K_1 f_i(t),\\ &\exp\left\{-i\omega\left[x(\alpha^{-2}-c^{-2})^{1/2}+\frac{z}{c}\right]\right\}\leftrightarrow\\ &\leftrightarrow\delta\left[t-x(\alpha^{-2}-c^{-2})^{1/2}-\frac{z}{c}\right],\\ &\Phi_r(x, z, t)=K_1 f_i(t)*\delta\left[t-x(\alpha^{-2}-c^{2})^{1/2}-\frac{z}{c}\right]=\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}K_1 f_i(\tau)\,\delta\left[t-x(\alpha^{-2}-c^{-2})^{1/2}-\frac{z}{c}-\tau\right]d\tau=\\ &=K_1 f_i\left[t-x(\alpha^{-2}-c^{-2})^{1/2}-\frac{z}{c}\right].\end{aligned}\right\}\qquad(2.35)$$

Отсюда вновь следует, что потенциал отраженной волны суть импульс, распространяющийся вдоль положительных направлений x и z, имеющий ту же форму, что и потенциал падающей волны и умноженный на коэффициент отражения K_1. Такой же анализ отраженного поперечного потенциала, определяемого уравнением (2.30), показал бы, что он представлен импульсом, распространяющимся со скоростью поперечной волны, имеющим ту же форму и умноженным на коэффициент K_2. Полностью аналогичные рассуждения можно применить к потенциалу падающей поперечной волны, описываемому уравнением (2.31). Однако, как будет показано ниже, при больших углах падения в преобразовании Фурье потенциалов появляются дополнительные члены.

Приведенные выше выражения определяют потенциалы, из которых можно найти смещения или другие измеряемые величины, но более целесообразно найти их непосредственно. Например, смещения можно получить, применяя соотношения (2.22) к (2.28), т. е.

$$\left.\begin{aligned} &u_x(x, z, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[-im\,(A_1 e^{imx}-A_2 e^{-imx})+\\ &+\frac{i\omega}{c}(B_1 e^{ikx}+B_2 e^{-ikx})\Big]e^{-i\omega z/c}\,e^{i\omega t}d\omega,\\ &u_z(x, z, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[-\frac{i\omega}{c}(A_1 e^{imx}+A_2 e^{-imx})+\\ &+ik\,(B_1 e^{ikx}-B_2 e^{-ikx})\Big]e^{-i\omega z/c}\,e^{i\omega t}d\omega.\end{aligned}\right\}\qquad(2.36)$$

Полагая x и z равными нулю и используя условия, при кото-

рых справедлива формула (2.30), получим при отражении продольной волны в начале координат:

$$\left.\begin{aligned} u_x(0,0,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega/c)\,F(\omega)\left[(1-K_1)\left(\frac{c^2}{\alpha^2}-1\right)^{1/2}+\right.\\ &\left.+K_2\right]e^{i\omega t}\,d\omega=(1/c)\left[(1-K_1)\left(\frac{c^2}{\alpha^2}-1\right)^{1/2}+K_2\right]f'(t),\\ u_z(0,0,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega/c)\,F(\omega)\left[-1-K_1-\left(\frac{c^2}{\beta^2}-1\right)^{1/2}\times\right.\\ &\left.\times K_2\right]e^{i\omega t}\,d\omega=(1/c)\left[-1-K_1-\left(\frac{c^2}{\beta^2}-1\right)^{1/2}K_2\right]f'(t).\end{aligned}\right\}\qquad(2.37)$$

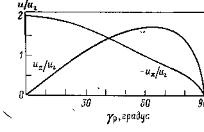


Рис. 2.6. Графики горизонтальных (u_x) и вертикальных (u_z) смещений на свободной границе при падении волны P под углом γ_P

Рис. 2.7. Сравнение кажущегося Γ_E и истинного γ_P углов падения при отражении волны P от свободной границы

Учитывая (2.17), находим, что смещение в падающей волне в направлении ее распространения представляется в виде

$$u_l(0,0,t)=-(1/\alpha)\,f'(t),\qquad(2.38)$$

Комбинируя (2.38) с формулой (2.37), получим следующие отношения:

$$\left.\begin{aligned}(u_x/u_l)&=-(\alpha/c)\,[(1-K_1)(c^2/\alpha^2-1)^{1/2}+K_2],\\ (u_z/u_l)&=(\alpha/c)\,[1+K_1+(c^2/\beta^2-1)^{1/2}K_2].\end{aligned}\right\}\qquad(2.39)$$

Отношения (u_x/u_l) и (u_z/u_l) изображены на рис. 2.6 как функции угла падения γ_P. Кажущийся угол выхода $\Gamma_E=\operatorname{arctg}(u_z/u_x)$ дан в сравнении с γ_P на рис. 2.7.

Второй случай, $\beta<|c|<\alpha$. Для углов падения больших, чем $\arcsin(\beta/\alpha)$, потенциалы, описываемые уравнением (2.28), неприменимы, поскольку $\omega^2(c^2-\alpha^2)$ меняется от отрицательных значений до положительных и M принимает вещественное значение вместо чисто мнимого. В этом случае возможны два решения: $e^{\overline{mx}}$ и e^{-mx}. Поскольку желательно, чтобы $e^{-\overline{mx}}$ представляло собой

убывающую на всех частотах экспоненту, то $\bar{m}$ следует определить как $|\omega|(c^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}$ или $\omega(c^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}\operatorname{sgn}\omega$, тем самым обеспечивается положительное значение $\bar{m}$. До тех пор пока $|c|>\beta$, величина $\omega^2(1/c^2-1/\beta^2)$ остается отрицательной, а k — чисто мнимой. Потенциалы, применяемые в этом скоростном диапазоне, таковы:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A_1 e^{\bar{m}x} + A_2 e^{-\bar{m}x}]e^{-i\omega z/c}e^{i\omega t}d\omega,\\
\psi_y &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[B_1 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx}]e^{-i\omega z/c}e^{i\omega t}d\omega,\\
\bar{m} &= |\omega|\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/2}, \quad k=\omega\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{c^2}\right)^{1/2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.40)$$

Чтобы избежать бесконечных значений Φ, коэффициент A_1 должен быть взят равным нулю. Слагаемое, включающее A_2, описывает волну, распространяющуюся в направлении z с амплитудой, затухающей экспоненциально при удалении от свободной поверхности. Равенство нулю двух напряжений определяет уравнения, связывающие три амплитудных коэффициента, которые дают возможность выразить амплитуды отраженных продольной A_2 и поперечной B_2 волн через амплитуду B_1 падающей поперечной волны:

$$\left.\begin{aligned}
&\beta<|c|<\alpha, \quad A_1=0,\\
&\frac{A_2}{B_1} = -\frac{4(c^2/\beta^2-1)^{1/2}(c^2/\beta^2-2)}{(c^2/\beta^2-2)^2-4i(1-c^2/\alpha^2)^{1/2}(c^2/\beta^2-1)^{1/2}\operatorname{sgn}\omega} = K_5 e^{i\theta_5\operatorname{sgn}\omega},\\
&\frac{B_2}{B_1} = -\frac{(c^2/\beta^2-2)^2+4i(1-c^2/\alpha^2)^{1/2}(c^2/\beta^2-1)^{1/2}\operatorname{sgn}\omega}{(c^2/\beta^2-2)^2-4i(1-c^2/\alpha^2)^{1/2}(c^2/\beta^2-1)^{1/2}\operatorname{sgn}\omega} = e^{i\theta_6\operatorname{sgn}\omega},
\end{aligned}\right\} \qquad (2.41)$$

Если падающая поперечная волна в начале координат имеет форму $f_1(t)$, а ее Фурье-преобразование $F_1(\omega)$, то последнее из уравнений (2.41), означает, что Фурье-преобразование потенциала отраженной поперечной волны равно $F_1(\omega)\ e^{i\theta_6\operatorname{sgn}\omega}$. Подстановка B_2 в уравнение (2.40) дает потенциал отраженной поперечной волны

$$\psi_{yr}(x,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\omega)e^{i\theta_6\operatorname{sgn}\omega}e^{-i\omega[(1/\beta^2-1/c^2)^{1/2}x+z/c]}e^{i\omega t}d\omega. \quad (2.42)$$

Преобразование Фурье потенциала отраженной волны выражается через произведение трех сомножителей:

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_{yr}(x, z, \omega) = F_1(\omega) \exp(i\theta_6 \operatorname{sgn}\omega) \times \\
&\times \exp\left\{-i\omega\left[x(\beta^{-2}-c^{-2})^{1/2} + \frac{z}{c}\right]\right\}, \\
&F_1(\omega) \leftrightarrow f_1(t), \\
&\exp(i\theta \operatorname{sgn}\omega) \leftrightarrow \delta(t)\cos\theta_6 + [-\pi t]^{-1}\sin\theta_6, \\
&\exp\left\{-i\omega\left[x(\beta^{-2}-c^{-2})^{1/2} + \frac{z}{c}\right]\right\} \rightarrow \delta\left[t - x(\beta^{-2}-c^{-2})^{1/2} - \frac{z}{c}\right], \\
&\psi_{yr}(x, z, t) = f_1(t) * \left\{\delta(t)\cos\theta_6 + [-\pi t]^{-1} \times\right. \\
&\left.\times \sin\theta_6\right\} * \delta\left[t - x(\beta^{-2} - c^{-2})^{1/2} - \frac{z}{c}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (2.43)$$

Уравнение (2.43) дает возможность рассчитать изменения формы, испытываемые любой волной, которая отражается за критическим углом, превышающим $\arcsin(\beta/\alpha)$. Эту процедуру легко выполнить численно на ЭВМ.

Расчеты формы волны скалярного потенциала, сопровождающего отражение поперечной волны, выполняются таким же путем; при этом добавляется один дополнительный член. Подставляя первую из формул (2.41) в (2.40), получим

$$\Phi_r(x, z, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) K_s e^{i\theta_s \operatorname{sgn}\omega} \exp\left(-|\omega|\left[\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right]^{1/2} x\right) e^{-i\omega z/c} e^{i\omega t}\, d\omega. \quad (2.44)$$

Преобразование Фурье скалярного потенциала выражается через произведение четырех сомножителей:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_r(x, z, \omega) \leftrightharpoons K_s F_1(\omega) \exp(i\theta_s \operatorname{sgn}\omega) \exp\left[-|\omega| x \times\right. \\
&\left.\times \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/2}\right] \exp\left(-\frac{i\omega z}{c}\right), \\
&K_s F_1(\omega) \leftrightarrow K_6 f_1(t), \\
&\exp(i\theta_s \operatorname{sgn}\omega) \leftrightarrow \delta(t)\cos\theta_s + [-\pi t]^{-1}\sin\theta_s, \\
&\exp\left[-|\omega| x\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/2}\right] \leftrightarrow \frac{x(c^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}}{x^2(c^{-2}-\alpha^{-2}) + t^2}, \\
&\exp\frac{-i\omega z}{c} \leftrightarrow \delta\left(t - \frac{z}{c}\right), \\
&\Phi_r(x, z, t) = K_5 f_1(t) * \{\delta(t)\cos\theta_s + \\
&+ [-\pi t[^{-1}\sin\theta_s\} * \frac{x(c^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}}{x^2(c^{-2}-\alpha^{-2}) + t^2} * \delta\left(t - \frac{z}{c}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (2.45)$$

Эти формулы дают возможность вычислять форму нестационарных волн на ЭВМ. Они дают также возможность анализировать факторы, влияющие на форму сигнала. Фактор $K_5 f_1(t)$ представляет собой форму падающей поперечной волны. Его свертка со вторым фактором дает изменение формы сигнала, вызываемое фазовым сдвигом на границе. На каждой глубине x измененная форма волны подвергается свертке с третьим фактором, представляющим унимодальную функцию, ширина которой увеличивается с удалением от границы. Свертка с последним членом показывает, что на любой глубине нестационарный сигнал распространяется в направлении z с кажущейся скоростью c.

Поверхностные волны Рэлея

Третий случай, $|c|<\beta<\alpha$. Если фазовая скорость меньше поперечной, то и K и M — вещественны. Потенциалы, отвечающие этому условию, таковы:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(A_1 e^{\bar{m}x} + A_2 e^{-\bar{m}x})\, e^{-i\omega z/c} e^{i\omega t}\, d\omega, \\ \psi_y &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(B_1 e^{\bar{k}x} + B_2 e^{-\bar{k}x})\, e^{-i\omega z/c} e^{i\omega t}\, d\omega, \\ \bar{m} &= |\omega|\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/2}, \quad \bar{k} = |\omega|\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

Здесь и A_1 и B_2 должны быть равны нулю, поэтому остается только определить два коэффициента. Поскольку напряжения на свободной границе равны нулю, получим следующие отношения между оставшимися двумя коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{B_2}{A_2} &= -\frac{(2-c^2/\beta^2)\, i \operatorname{sgn}\omega}{2(1-c^2/\beta^2)^{1/2}} = -i \operatorname{sgn}\omega K_7, \\ \frac{B_2}{A_2} &= -\frac{2(1-c^2/\alpha^2)^{1/2}\, i \operatorname{sgn}\omega}{(2-c^2/\beta^2)} = -i \operatorname{sgn}\omega\, K_7. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Оба выражения должны быть равными. Это означает, что фазовая скорость удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left(2-\frac{c^2}{\beta^2}\right)^2 - 4\left(1-\frac{c^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2} = 0. \tag{2.48}$$

Вещественный корень этого уравнения дает скорость волны, впервые описанной Рэлеем в 1885 г. Скорость волны Рэлея не-

сколько меньше скорости поперечной волны, а их отношение определяется следующим выражением:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{c_R}{\beta}=\left\{\left[-\frac{q}{2}+\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right]^{1/3}+\right.\\
&\left.+\left[-\frac{q}{2}-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right]^{1/3}+\frac{8}{3}\right\}^{1/2},\\
&\text{для }\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)>0,\\
&\frac{c_R}{\beta}=\left\{-2\left(\frac{-p}{3}\right)^{1/2}\cos\left[\frac{\pi-\cos^{-1}\left(-27q^2/4p^3\right)^{1/2}}{3}\right]+\frac{8}{3}\right\}^{1/2},\\
&\text{для }\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)<0,\\
&p=\frac{8}{3}-\frac{16\beta^2}{\alpha^2},\quad q=\frac{272}{27}-\frac{80\beta^2}{3\alpha^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.49}$$

Зависимость c_R/β от β^2/α^2 приведена на рис. 2.8. Основные свойства волны Рэлея могут быть выявлены при рассмотрении стационарных колебаний на некоторой угловой частоте ω_0. Положив в уравнении (2.46) $A_1=0$, $B_1=0$ и $A_2=A\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$, получим следующие выражения потенциалов:

$$\begin{aligned}
&\Phi=A\,e^{-\bar{m}x}\cos\omega_0\,(t-z/c_R),\\
&\psi_y=K_7A\,e^{-\bar{k}x}\sin\omega_0\,(t-z/c_R).
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Используя формулу (2.22), находим смещения

$$\begin{aligned}
&u_x=[-\bar{m}e^{-\bar{m}x}+(K_7\omega_0/c_R)e^{-\bar{k}x}]A\cos\omega_0(t-z/c_R),\\
&u_z=[(\omega_0/c_R)e^{-\bar{m}x}-K_7\bar{k}e^{-\bar{k}x}]A\sin\omega_0(t-z/c_R).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Если представить свободную поверхность горизонтальной, то u_x есть вертикальное смещение и волна распространяется в горизонтальном направлении z. Заметим, что движение частиц в окрестности свободной поверхности возвратно, т. е. для $x=0$ траектория смещения частиц является эллипсом, в котором горизонтальное движение уменьшается, а вертикальное движение достигает максимального превышения над уровнем $x=0$. Такой характер записи наблюдается на сейсмограммах от землетрясений и на трехкомпонентных записях волн, вызванных малыми взрывами. Был рассмотрен один численный пример при $\alpha^2/\beta^2=3$. В уравнении (2.51) u_x и u_z со-

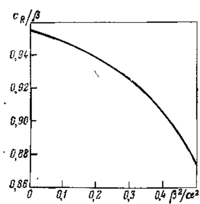


Рис. 2.8. Скорость волны Рэлея на поверхности изотропного упругого полупространства в зависимости от отношения скоростей объемных волн

держат по два слагаемых, уменьшающихся с глубиной экспоненциально, но с разными скоростями. В каждом случае коэффициенты при положительных слагаемых больше, поэтому на поверхности смещения положительны. Для смещения u_x больший член уменьшается с глубиной не так быстро, поэтому оно остается положительным. Однако положительное слагаемое u_z уменьшается быстрее, поэтому горизонтальное смещение изменяет знак на определенной глубине x_1. Это можно увидеть на рис. 2.9, где относительные смещения $U_x=(u_x c_R/\omega_0 A)$ и $U_z=(u_z c_R/\omega_0 A)$ даны в зависимости от относительной глубины $\bar{x}=x\omega_0/2\pi c_R$. Ниже глубины x_1 направление движения частиц изменяется на обратное. Это явление наблюдалось в экспериментах при возбуждении волн Рэлея малыми зарядами ВВ с трехкомпонентной регистрацией до глубины 33 м и через интервал 3 м в районе, где видимая длина волны для наблюдаемого пакета волн Рэлея равнялась примерно 100 м [41].

Энергия в волне Рэлея также сконцентрирована вблизи поверхности. Приведем выражения для интенсивности, плотности кинетической энергии и плотности потенциальной энергии:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= -p_{xx}v_x - p_{zx}v_z, \\ I_z &= -p_{zx}v_x - p_{zz}v_z, \\ KE &= \rho(v_x^2+v_z^2)/2, \\ PE &= [\rho\alpha^2(e_{xx}+e_{zz})^2+\rho\beta^2(e_{zx}^2-4e_{xx}e_{zz})]/2, \\ E &- KE+PE. \end{aligned}\right\} \quad (2.52)$$

Используя выражения смещений согласно (2.51), можно получить, что интенсивность пропорциональна $\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t$. Следовательно, поток энергии перпендикулярен к поверхности и осциллирует с двойной частотой. Его среднее значение за период равно нулю. Параллельный границе поток энергии I_z изменяется как $\sin^2\omega_0 t$ или $\cos^2\omega_0 t$ и его среднее значение по времени не равно нулю. Напишем выражения для средних значений [62]:

$$\left.\begin{aligned} \bar{I}_x &= 0, \\ \bar{I}_z &= I\,((1+4r^2\beta^2/c_R^2)\,e^{-2r\bar{x}} - (r/s)^{1/2}(r+s)\times \\ &\times[1+2(1+rs)\beta^2/c_R^2]\,e^{-(r+s)\bar{x}} + (r/s)\times \\ &\times(-3+4\beta^2/c_R^2)\,e^{-2s\bar{x}}\}, \\ r &= (1-c_R^2/\alpha^2)^{1/2}, \quad s-(1-c_R^2/\beta^2)^{1/2}, \\ I_0 &= \rho\omega_0^4 A^2/2c_R, \quad \bar{x} = \omega_0 x/c_R. \end{aligned}\right\} \quad (2.53)$$

Первое слагаемое выражения I_z уменьшается со скоростью, определяемой величиной $\bar{m}=\omega_0 r/c_R$ и, следовательно, обусловлено скалярным потенциалом Ф. Последнее слагаемое подобным же образом зависит от ψ_y. Среднее слагаемое, отражающее взаимодействие скалярного и векторного потенциалов, имеет обратный

знак и промежуточную степень затухания. Суммарное действие трех слагаемых показано на рис. 2.10. Наибольшая интенсивность наблюдается на поверхности. Существует смещение, равное нулю. Поток энергии концентрируется вблизи поверхности до глубины, составляющей долю длины волны. Плотность кинетической и потенциальной энергий экспоненциально убывает при удалении от поверхности, хотя коэффициенты экспонент разные. Однако среднее значение по времени суммы обеих энергий дает коэффициенты в показателях экспонент, такие же как и в уравнении (2.53). По-

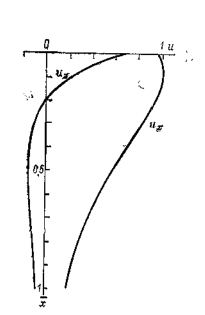


Рис. 2.9. Графики горизонтальных (u_x) и вертикальных (u_z) смещений в рэлеевской волне в зависимости от глубины при ($\alpha^2/\beta^2=3$)

Рис. 2.10. Интенсивность горизонтальной компоненты рэлеевской волны как функция глубины при $\alpha^2/\beta^2=3$

этому усредненная по времени плотность энергии пропорциональна усредненной по времени интенсивности на всех расстояниях от поверхности. Отношение интенсивности к плотности энергии определяется как скорость переноса энергии, и приведенные расчеты показывают, что она равна фазовой скорости c_R, не зависящей от частоты, т. е.

$$I_z/E=c_R. \quad (2.54)$$

Заключение

Рассмотрено как единое целое семейство упругих волн, возникающее на свободной границе при падении плоских монохроматических волн. Если фазовая скорость волн вдоль границы выше ско-

рости в среде, то возмущение во внутренних точках твердого тела состоит из плоских продольных и поперечных волн. Относительные амплитуды можно выбрать таким образом, чтобы исключить, например, падающую поперечную волну, а рассматривать отражение продольной волны либо другую ситуацию. Для фазовых скоростей, лежащих в интервале между скоростями продольных и поперечных волн, найдено, что отсутствие напряжений на свободной границе требует одновременного присутствия падающей и отраженной поперечных волн равной амплитуды и продольного возмущения, которое не является обычной продольной волной, поскольку его амплитуда экспоненциально убывает с удалением от границы. Для фазовых скоростей, меньших чем скорость поперечных волн, скалярный и векторный потенциалы при удалении от поверхности должны экспоненциально убывать; при этом выясняется, что условия на свободной границе могут быть удовлетворены для одного только единственного значения фазовой скорости, а именно для скорости рэлеевской волны.

ВОЛНЫ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ МЕЖДУ ФЛЮИДАМИ И ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ

Граничные условия

Кратко рассмотрены волны, образующиеся на границе между жидкостью и твердым телом, служащие примером использования потенциалов при определении волнового поля, которое удовлетворяет граничным условиям и любым другим наложенным ограничениям. Решения будут построены для плоских волн, проходящих в обеих средах до тех пор, пока фазовая скорость вдоль границы больше любой скорости объемных волн. На рис. 2.11 показаны потенциалы в обеих средах. Величины, помеченные штрихом, относятся к жидкости:

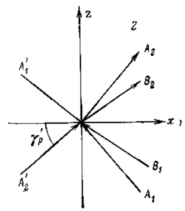


Рис. 2.11. Схема потенциалов на границе жидкость — твердое тело.
1 — жидкость; *2* — твердое тело

$$\left.\begin{aligned} \Phi'(x, z, \omega) &= (A_1' e^{im'x} + A_2' e^{-im'x})\, e^{-i\omega z/c}, \\ \Phi(x, z, \omega) &= (A_1 e^{imx} + A_2 e^{-imx})\, e^{-i\omega z/c}, \\ \psi_y(x, z, \omega) &= (B_1 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx})\, e^{-i\omega z/c}. \end{aligned}\right\} \quad (2.55)$$

Теперь на границе необходимо удовлетворить трем условиям: 1) непрерывности нормального напряжения; 2) отсутствия касательного напряжения; 3) непрерывности нормального смещения. Эти условия дают три отношения, связывающие шесть компонент:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\rho' c^2}{\rho\beta^2}(A_1' + A_2') = \left(\frac{c^2}{\beta^2} - 2\right)(A_1 + A_2) + 2\left(\frac{c^2}{\beta^2} - 1\right)^{1/2}(B_1 - B_2),\\
&2\left(\frac{c^2}{\alpha^2} - 1\right)^{1/2}(A_1 - A_2) - \left(\frac{c^2}{\beta^2} - 2\right)(B_1 + B_2) = 0,\\
&\left(\frac{c^2}{\alpha'^2} - 1\right)^{1/2}(A_1' - A_2') = \left(\frac{c^2}{\alpha} - 1\right)^{1/2}(A_1 - A_2) + (B_1 + B_2)
\end{aligned}\right\} \quad (2.56)$$

Волны, падающие из жидкости

Представляет интерес отражение волны, падающей на границу жидкость — твердая среда. При определении мощности слоя воды эхолотированием используются звуковые волны, отраженные при почти нормальном падении от дна океана. В сейсморазведке в акваториях используется звук, генерируемый в воде при помощи взрывов, и многократные отражения между поверхностью воды и твердым дном (реверберации), безусловно, могут быть аппроксимированы волнами такого вида. Для описания такого случая необходимо дополнительно предположить, что A_1 и B_1 равны нулю и что A'_2 известна

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{A_1'}{A_2'} = \frac{R - R'}{R + R'},\\
&\frac{A_2}{A_2'} = \frac{2(\rho'/\rho)(1 - 2\beta^2/c^2)[\rho\alpha/(1 - \alpha^2/c^2)^{1/2}]}{R + R'},\\
&\frac{B_2}{A_2'} = -\frac{4(\rho'/\rho)(\beta/c)(\rho\beta)}{R + R'},
\end{aligned}\right\} \quad (2.57)$$

где

$$R = [\rho\alpha/(1 - \alpha^2/c^2)^{1/2}][(1 - 2\beta^2/c^2)^2 + 4(\beta^2/\alpha c^2)(1 - \beta^2/c^2)^{1/2}(1 - \alpha^2/c^2)^{1/2}];$$

$$R' = [\rho'\alpha'/(1 - \alpha'^2/c^2)^{1/2}].$$

В выражение звукового поля в жидкости амплитуды A_2 и B_2 непосредственно не входят, хотя эффект проходящих поперечных и продольных волн был уже учтен коэффициентом отражения A'_1/A'_2. Следует отметить некоторые особенности коэффициента отражения. Во-первых, это вещественное число, независимое от частоты. Это означает, что волны будут отражаться без изменения формы. При нормальном падении волны (кажущаяся скорость c бесконечна, т. е. $\alpha'/c = \sin\gamma'_P = 0$) коэффициент отражения равен $(\rho\alpha - \rho'\alpha')/(\rho\alpha + \rho'\alpha')$. Произведение плотности флюида и скорости звука в нем называется ***акустическим сопротивлением***, следова-

тельно, и коэффициент отражения при нормальном падении волны на границу между двумя флюидами определяется отношением разности и суммы двух акустических сопротивлений. По аналогии произведение $\rho\alpha$ можно назвать *продольным волновым сопротивлением*, а произведение $\rho\beta$ — *поперечным волновым сопротивлением*. Если в (2.57) скорость поперечных волн β взять равной нулю, то коэффициент отражения становится равным

$$\frac{[\rho\alpha/(1-\alpha^2/c^2)^{1/2}]-[\rho'\alpha'/(1-\alpha'^2/c^2)^{1/2}]}{[\rho\alpha/(1-\alpha^2/c^2)^{1/2}]+[\rho'\alpha'/(1-\alpha'^2/c^2)^{1/2}]}.$$

Это выражение может также рассматриваться как разность, деленная на сумму двух акустических импедансов, поскольку величины $\alpha/(1-\alpha^2/c^2)^{1/2}$ и $\alpha'/(1-\alpha'^2/c^2)^{1/2}$ являются двумя фазовыми скоростями в направлении, перпендикулярном к отражающей поверхности. Общее выражение для коэффициента отражения A'_1/A'_2 имеет форму $(R-R')/(R+R')$. По аналогии величина R будет называться акустическим импедансом твердой среды. Зависимость коэффициента отражения от угла падения изображена на рис. 2.12, при этом формула (2.57) использовалась вплоть до критического угла, при котором c равно α или $\sin\gamma_P=\alpha'/\alpha$. Плоские продольные волны не распространяются в твердой среде, если $|c|<\alpha$ и Φ уменьшаются экспоненциально с расстоянием от границы. Это условие использовано в формуле (2.57). Для определения коэффициента отражения на остальной части графика для углов падения, больших чем $\arcsin(\alpha'/\alpha)$, использовались следующие константы, характерные для модели жидкого слоя воды над твердым дном [109]: $\rho=1{,}7$ г/см³; $\alpha=1{,}7\times10^5$ см/с; $\beta=0{,}6\times10^5$ см/с; $\rho'=1$ г/см³; $\alpha'=1{,}5\times10^5$ см/с.

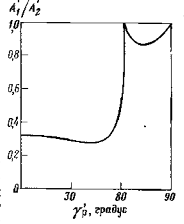


Рис. 2.12. Зависимость коэффициента отражения при падении волны, распространяющейся в воде, на донные осадочные отложения от угла падения

Поперечно-изотропная среда

До сих пор мы ограничивались рассмотрением волн в изотропных средах. Многие изверженные породы, а также некоторые карбонаты и песчаники не проявляют явных свойств, характеризующих направленность, и поэтому ведут себя так же, как изотропные твердые тела. Однако для большинства глинистых и некоторых других отложений характерны плоскости кливажа либо ориентация зерен в образцах размером 1 см^3. Эти свойства направленности могут проявляться и в мощном слое с большим латеральным протяжением, если предположить, что порода рассматривается как однородная, но анизотропная твердая среда. Было показано, что многие толщи Земли, состоящие из многочисленных тонких осадочных слоев, когда через них распространяются низкочастотные сейсмические волны, ведут себя как однородные, но анизотропные среды [165]. Под влиянием веса вышележащих пород свойства глубокозалегающих отложений могут обладать симметрией относительно вертикали. Материал с такой осью симметрии был назван поперечно-изотропным [95, 149]. Плоские волны внутри такой твердой среды были подробно рассмотрены Рудцким [135], а поверхностные и объемные волны изучались Стоунли [149]. Другие авторы в последнее время занимались проблемами изучения волн от локализованного источника в поперечно-изотропной среде. Эта проблема будет рассмотрена в разделе, посвященном сейсмическим источникам. Ниже изучается свойство плоских волн, распространяющихся в безграничной поперечно-изотропной среде.

Уравнения движения. Понятия напряжения и деформации и терминология, установленная для изотропных твердых тел, применимы без изменений к анизотропным твердым телам так же, как и уравнения движения, выраженные через напряжения, согласно уравнению (2.3). Но изменяется связь между напряжениями и деформациями. Согласно закону Гука в его наиболее общей форме каждая компонента напряжения зависит линейно от каждой компоненты деформации, а константы пропорциональности интерпретируются как упругие константы. Для изотропной среды имеются только две независимые константы. В случае поперечно-изотропной среды закон Гука содержит пять независимых констант. Если для них использовать обозначения Лява, то связь напряжения и деформации запишется так:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= Ae_{xx} + (A-2N)e_{yy} + Fe_{zz},\\ p_{yy} &= (A-2N)e_{xx} + Ae_{yy} + Fe_{zz},\\ p_{zz} &= Fe_{xx} + Fe_{yy} + Ce_{zz},\\ p_{xy} &= Ne_{xy}, \quad p_{yz} = Le_{yz}, \quad p_{zx} = Le_{zx}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.58)$$

В качестве оси симметрии используется ось z. Подставляя соотношения (2.58) в (2.3), получим уравнения движения для смещений:

$$\left.\begin{aligned}
&A\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+N\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+L\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+(A-N)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\,\partial y}+\\
&+(F+L)\times\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\,\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},\\
&(A-N)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial y}+N\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+A\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+L\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}+\\
&+(F+L)\frac{\partial^2 u_z}{\partial y\,\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2},\\
&(F+L)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial z}+(F+L)\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\,\partial z}+L\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\\
&+L\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+C\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.
\end{aligned}\right\}\qquad(2.59)$$

Эта система уравнений эквивалентна системе (2.4) для изотропной среды. В этом случае можно получить простое решение, подобное тем, которые строились для уравнений (2.5) и (2.9). Например, полагая $u_y=u_z=0$ и считая, что u_x зависит только от x и t, найдем, что решением уравнения (2.59) является произвольная функция от $(t\pm x/c_P)$, где $c_P=(A/\rho)^{1/2}$. Это — обычная продольная волна. Аналогично $u_y(x, t)$ представляет собой поперечную волну, распространяющуюся в горизонтальном направлении со скоростью $c_{SH}=(N/\rho)^{1/2}$, в то время как $u_z(x, t)$ является поперечной волной, распространяющейся в том же направлении со скоростью c_{SV}. При распространении в вертикальном направлении $u_z(z, t)$ является продольной волной, имеющей скорость $c_P=(C/\rho)^{1/2}$; $u_x(z, t)$ и $u_y(z, t)$ суть поперечные волны, имеющие одинаковую скорость $(L/\rho)^{1/2}$.

Решение в потенциалах. По аналогии с изотропными средами, более общий путь построения решений для системы (2.59) состоит в использовании скалярных и векторных потенциалов. Проиллюстрируем этот подход на примере SV-волн [149]. С этой целью, считая ось z направленной по вертикали, ось x — по горизонтали и $u_y=0$, сведем задачу к рассмотрению движения только в плоскости x, z. Кроме того, все величины будем считать независимыми от y. Это те же предположения, которые были сделаны при выводе равенства (2.19). Начнем со следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned}
u_x&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z},\\
u_y&=0,\\
u_z&=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\psi_y}{\partial z}.
\end{aligned}\right\}\qquad(2.60)$$

Если взять Φ и ψ_y в виде экспоненциальных функций от x, z и t, то как и в уравнениях (2.22) получим в общем случае, что ни Φ, ни ψ_y не могут порознь быть решениями (2.59). Однако имеются две комбинации, которые удовлетворяют этому условию. Первая может быть названа квазипродольной волной, поскольку она стремится к изотропной P-волне при уменьшении степени анизотропии:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_P &= (A_1 e^{Mx} + A_2 e^{-Mx})\, e^{ilz} e^{i\omega t},\\ \psi_P &= a(A_1 e^{Mx} - A_2 e^{-Mx})\, e^{ilz} e^{i\omega t},\\ a &= \frac{M[(F+2L)l^2 - AM^2 - \rho\omega^2]}{il\,[Ll^2 - (A-F-L)M^2 - \rho\omega^2]}.\end{aligned}\right\} \quad (2.61)$$

Вторая комбинация может быть названа по аналогии квазипоперечной волной SV:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{SV} &= b(B_1 e^{Kx} - B_2 e^{-Kx})\, e^{ilz} e^{i\omega t},\\ \psi_{SV} &= (B_1 e^{Kx} + B_2 e^{-Kx})\, e^{ilz} e^{i\omega t},\\ b &= \frac{il\,[Ll^2 - (A-F-L)K^2 - \rho\omega^2]}{K[(F+2L)l^2 - AK^2 - \rho\omega^2]}.\end{aligned}\right\} \quad (2.62)$$

В формулах (2.61) и (2.62) экспоненциальные коэффициенты M и K определяют по формулам

$$\begin{aligned}M &= [(-B + \sqrt{B^2 - 4AC})/2A]^{1/2},\\ K &= [(-B - \sqrt{B^2 - 4AC})/2A]^{1/2},\end{aligned} \quad (2.63)$$

где

$$\begin{aligned}A &= AL;\\ B &= (\rho\omega^2 - Ll^2)L + (\rho\omega^2 - Cl^2)A + (F+L)^2 l^2;\\ C &= (\rho\omega^2 - Ll^2)(\rho\omega^2 - Cl^2).\end{aligned}$$

При помощи этих выражений явление отражения от плоской границы так же, как излучение волн от источника, помещенного на плоской границе, могут изучаться посредством двойного преобразования Фурье. Если источник задан в виде своей Фурье-трансформанты, смещение в любой точке среды можно найти с помощью численного обратного преобразования Фурье. Соответствующий пример представлен в гл. 6. Ниже более подробно рассмотрим простой случай распространения плоской волны в неограниченной среде.

Фазовые скорости плоских волн. В диапазоне значений l и ω, для которых M — чисто мнимая величина (равна im), экспонента $e^{imx}e^{ilz}e^{i\omega t}$ представляет плоскую волну, распространяющуюся в направлении, составляющем угол γ_z с осью z, со скоростью c_P. Мы видим, что $m = \omega \sin\gamma_z/c_P$. Положим $l = -\omega\cos\gamma_z/c_P$. Вторые члены в уравнениях (2.61) имеют форму $A_2 e^{i\omega\tau}$ и $-aA_2 e^{i\omega\tau}$, где $\tau = t - x\sin\gamma_z/c_P - z\cos\gamma_z/c_P$. Отметим, что в этом

случае a независимо от ω. Тогда уравнения (2.61) для квазипродольной волны запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} \Phi_P &= f\,(t - x\sin\gamma_z/c_P - z\cos\gamma_z/c_P),\\ \psi_P &= -af\,(t - x\sin\gamma_z/c_P - z\cos\gamma_z/c_P),\\ a &= -\operatorname{tg}\gamma_z\left[\frac{(F+2L)\cos^2\gamma_z + A\sin^2\gamma_z - \rho c_P^2}{L\cos^2\gamma_z + (A-F-L)\sin^2\gamma_z - \rho c_P^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.64}$$

В диапазоне, где K — чисто мнимое, эквивалент уравнения (2.62) описывает квазипоперечную волну:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{SV} &= -bf(t - x\sin\gamma_z/c_{SV} - z\cos\gamma_z/c_{SV}),\\ \psi_{SV} &= f\,(t - x\sin\gamma_z/c_{SV} - z\cos\gamma_z/c_{SV}),\\ b &= -\operatorname{ctg}\gamma_z\left[\frac{L\cos^2\gamma_z + (A-F-L)\sin^2\gamma_z - \rho c_{SV}^2}{(F+2L)\cos^2\gamma_z + A\sin^2\gamma_z - \rho c_{SV}^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.65}$$

Согласно Р. Стоунли скорости распространения обеих волн таковы:

$$c_P = [(p+q)/2\rho]^{1/2},\quad c_{SV} = [(p-q)/2\rho]^{1/2}, \tag{2.66}$$

где

$$p = A\sin^2\gamma_z + C\cos^2\gamma_z + L;$$
$$q = \{[(A-L)\sin^2\gamma_z - (C-L)\cos^2\gamma_z]^2 + 4(F+L)^2\sin^2\gamma_z\cos^2\gamma_z\}^{1/2}.$$

Без вывода заметим, что плоская волна может распространяться в плоскости xz под углом γ_z с осью z так, что движение частиц происходит перпендикулярно к плоскости xz. Этот тип поперечной волны принято называть волной SH. Ее скорость

$$c_{SH} = [(N\sin^2\gamma_z + L\cos^2\gamma_z)/\rho]^{1/2}. \tag{2.67}$$

При горизонтальном распространении волны скорость зависит только от одной упругой константы, т. е. $c_{SH} = (N/\rho)^{1/2}$; аналогично при вертикальном распространении волны $c_{SH} = (L/\rho)^{1/2}$.

Эти скорости изображены на рис. 2.13 для слабоанизотропного мела из провинции Остин. Четыре из пяти упругих констант могут быть измерены [187], а F принята предположительно равной 12×10^{10} дин/см.

Когда степень анизотропии уменьшается до нуля, $A = C = \lambda + 2\mu$, $L = N = \mu$ и $F = \lambda$; все предшествующие уравнения сводятся к соответствующим выражениям для изотропных сред.

Смещения. Для квазипродольной волны направление смещения частиц не перпендикулярно к фазовому фронту. Угол между

осью z и направлением смещения частиц Γ_M можно определить, подставляя (2.64) в (2.60):

$$\left.\begin{aligned} u_x &= [-\sin\gamma_z/c_P - a\cos\gamma_z/c_P]\, f'(\tau),\\ u_z &= [-\cos\gamma_z/c_P - a\sin\gamma_z/c_P]\, f'(\tau),\\ \operatorname{tg}\Gamma_M &= \frac{u_x}{u_z} = \operatorname{tg}\gamma_z\left[\frac{1+a\operatorname{ctg}\gamma_z}{1-a\operatorname{tg}\gamma_z}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (2.68)$$

Для любого угла γ_z направление смещения частиц может быть рассчитано в явном виде. На рис. 2.14 оба угла (γ_z и Γ_M) сравниваются для мела формации Остин. Отметим, что движение чисто продольное для углов $\gamma_z=0$ и $\gamma_z=\pi/2$.

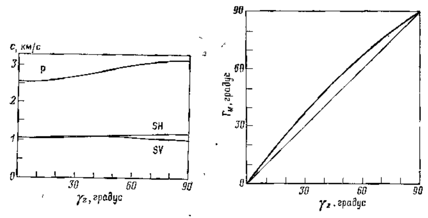


Рис. 2.13. Фазовые скорости плоской квазипродольной и квазипоперечной волн в меловых породах Остинской формации

Рис. 2.14 Сравнение направления движения частиц Γ_M с нормалью к фазовому фронту γ_z

Для квазипоперечной волны подстановка (2.65) в (2.60) дает следующие равенства для направления смещения частиц:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= (b\sin\gamma_z/c_{SV} + \cos\gamma_z/c_{SV})\, f'(\tau),\\ u_z &= (b\cos\gamma_z/c_{SV} - \sin\gamma_z/c_{SV})\, f'(\tau),\\ \operatorname{tg}\Gamma_M &= \frac{u_x}{u_z} = -\operatorname{ctg}\gamma_z\left[\frac{1+b\operatorname{tg}\gamma_z}{1-b\operatorname{ctg}\gamma_z}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (2.69)$$

Поток энергии. Перед выводом уравнений (2.10) и (2.15) мы отметили, что для плоских продольной и поперечной волн в изотропной твердой среде направление потока энергии перпендикулярно к фазовому фронту и что скорость переноса энергии такая же, как фазовая скорость. Для анизотропных сред эти две скорости отличаются как по величине, так и по направлению. В литературе упоминается несколько способов вычисления скорости переноса энергии для плоской волны с любой заданной фазовой скоростью. Один из ранее применявшихся способов базировался

на параметрических решениях полиномиальных уравнений высокой степени [135]. Позже был предложен графический способ вычисления искомой скорости [122]. В случае синусоидальной зависимости от t групповая скорость определяется как частная производная угловой частоты. Для плоской волны в анизотропной среде эта скорость равна скорости перемещения энергии [49]. Представляется, что наиболее эффективный способ заключается в вычислении скорости переноса энергии как отношения интенсивности к плотности энергии.

Компоненты интенсивности для двух типов плоских волн вдоль двух осей определим по формулам

$$I_x = -p_{xx}v_x - p_{zx}v_z,$$
$$I_z = -p_{zx}v_x - p_{zz}v_z. \qquad (2.70)$$

Кинетическая энергия на единицу объема равна $\rho(v^2_x+v^2_z)/2$. Поскольку плотность потенциальной энергии в плоской волне равна плотности кинетической энергии [49], то плотность общей энергии будет

$$E = \rho(v^2_x+v^2_z). \qquad (2.71)$$

Для квазиволны P искомые выражения, описываемые через потенциалы (2.64), имеют вид

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -Qf''(\tau),\\ v_z &= -Rf''(\tau),\\ p_{xx} &= (AQ\sin\gamma_z/c_P + FR\cos\gamma_z/c_P)\,f''(\tau),\\ p_{zz} &= (FQ\sin\gamma_z/c_P + CR\cos\gamma_z/c_P)\,f''(\tau),\\ p_{zx} &= L\,(Q\cos\gamma_z/c_P + R\sin\gamma_z/c_P)\,f''(\tau), \end{aligned}\right\} \qquad (2.72)$$

где

$$Q = (1 + a\operatorname{ctg}\gamma_z)\ (\sin\gamma_z/c_P);$$
$$R = (1 - a\operatorname{tg}\gamma_z)\ (\cos\gamma_z/c_P).$$

Определим скорость перемещения энергии V_P и угол Γ_E с осью z:

$$\left.\begin{aligned} V_{Px} &= \frac{I_x}{E} = \frac{(AQ^2+LR^2)(\sin\gamma_z/c_P) + (F+L)\,QR\,(\cos\gamma_z/c_P)}{\rho\,(Q^2+R^2)},\\ V_{Pz} &= \frac{I_z}{E} = \frac{(CR^2+LQ^2)(\cos\gamma_z/c_P) + (F+L)\,QR\,(\sin\gamma_z/c_P)}{\rho\,(Q^2+R^2)},\\ V_P &= \left(V^2_{Px}+V^2_{Pz}\right)^{1/2},\\ \operatorname{tg}\Gamma_E &= (V_{Px}/V_{Pz}). \end{aligned}\right\} \qquad (2.73)$$

Приведенные выше выражения потока энергии для квазипродольных волн справедливы и для потока энергии квазипоперечных SV-волн при замене c_P на c_{SV}. Замена c_P на c_{SV} в выражении для a в (2.64) дает величину, обратную b в (2.65). Учитывая, что V_{SVx} и V_{SVz} получены путем замены c_{SV} на c_P в (2.73), запишем:

$$V_{SV} = (V^2_{SVx}+V^2_{SVz})^{1/2},$$
$$\operatorname{tg}\Gamma_E = (V_{SVx}/V_{SVz}). \qquad (2.74)$$

Эти скорости переноса энергии показаны на рис. 2.15 для мела из формации Остин. Отметим, что они не отличаются резко от фазовых скоростей, показанных на рис. 2.13.

Из рис. 2.16 видим, что направление потока энергии значительно отличается от направления нормали к фазовому фронту. Для квазипродольных волн угол Γ_E всегда больше, чем γ_z. Это означает, что поток энергии отклоняется в сторону горизонтали. Энергия квазипоперечных волн P до углов, меньших 40°, отклоняется в сторону горизонтали, а затем в сторону вертикали.

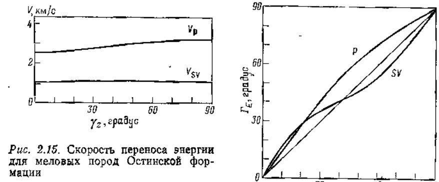


Рис. 2.15. Скорость переноса энергии для меловых пород Остинской формации

Рис. 2.16. Сравнение направления потока энергии Γ_E с нормалью к фазовому фронту для квазипродольной и квазипоперечной волн в меловых породах Остинской формации

Поверхностные волны. Для тех значений l и ω, при которых M и K вещественны, соответствующие потенциалы ведут себя примерно так же, как и в случае изотропных сред. Поэтому можно ожидать, что на свободной границе поперечно-изотропной среды будут распространяться поверхностные волны, аналогичные волне Рэлея. Эти волны кратко обсуждались Р. Стоунли и другими исследователями [48, 154]. В зависимости от степени анизотропии величины M и K могут иметь мнимую и вещественную части при больших значениях l^2/ω^2. В этой ситуации потенциалы экспоненциально, но скорее осциллирующим образом, чем монотонно, уменьшаются при удалении от границы.

Среда с кубической симметрией

Здесь не предполагается, что значительный по размерам участок земли может быть представлен как макрооднородная среда с кубической симметрией. Даже соляной купол представляет аморфную массу, а не единый кристалл галита. Однако регулярная упаковка сфер может рассматриваться в качестве идеализированной модели зернистых пород; при этом простая кубическая упаковка может быть взята в качестве начального приближения. Поэтому целесо-

образно привести некоторые из простейших особенностей волн в упругой среде с кубической симметрией.

Связь деформации с напряжением требует трех констант. В широко используемых обозначениях эквивалент уравнений (2.2) запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= C_{11} e_{xx} + C_{12} e_{yy} + C_{12} e_{zz}, \\ p_{yy} &= C_{12} e_{xx} + C_{11} e_{yy} + C_{12} e_{zz}, \\ p_{zz} &= C_{12} e_{xx} + C_{12} e_{yy} + C_{11} e_{zz}, \\ p_{yz} &= C_{44} e_{yz}, \quad p_{zx} = C_{44} e_{zx}, \quad p_{xy} = C_{44} e_{xy}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.75)$$

Чтобы выделить волны, проходящие параллельно к кубической оси, возьмем u_x в качестве единственной ненулевой компоненты смещения и будем считать ее независимой от y и z. Тогда отношение напряжение/деформация будет $p_{xx}=C_{11}e_{xx}$; эквивалент (2.3) запишем в виде $\partial p_{xx}/\partial x=\rho(\partial^2 u_x/\partial t^2)$, а эквивалент (2.5) соответственно

$$C_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \qquad (2.76)$$

Отсюда следует, что продольная волна может проходить вдоль кубической оси со скоростью, определяемой равенством

$$c_P = (C_{11}/\rho)^{1/2}. \qquad (2.77)$$

Подобным же образом, если u_x и u_z взять равными нулю и если u_y не зависит от y и z, то получаем эквивалент (2.9):

$$C_{44}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}. \qquad (2.78)$$

Из этого уравнения мы видим, что поперечная волна может проходить вдоль кубической оси со скоростью

$$c_S = (C_{44}/\rho)^{1/2}. \qquad (2.79)$$

Ортотропная среда

Имеются участки, в которых значительные объемы породы могут быть описаны как прямоугольные блоки относительно однородного материала, контактирующие по трем рядам плоскостей разломов. Средние размеры блоков по трем направлениям могут быть различны и природа контактов между блоками своя для каждого из трех рядов плоскостей разломов. Отсюда следует, что при распространении волн с большой длиной волны поведение в среднем

такой породы может соответствовать поведению ортотропных упругих тел [183]. Благодаря нелинейным эффектам неравномерная нагрузка может вызывать анизотропию в структурном изотропном скелете породы, что обусловливает три ортогональные плоскости симметрии, характеризующие ортотропную среду. Приведем здесь зависимость деформации от напряжения для такой среды:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= C_{11} e_{xx} + C_{12} e_{yy} + C_{13} e_{zz}, \\ p_{yy} &= C_{12} e_{xx} + C_{22} e_{yy} + C_{23} e_{zz}, \\ p_{zz} &= C_{13} e_{xx} + C_{23} e_{yy} + C_{33} e_{zz}, \\ p_{yz} &= C_{44} e_{yz}, \quad p_{zx} = C_{55} e_{zx}, \quad p_{xy} = C_{66} e_{xy}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.80)$$

Ясно, что чисто продольная волна может распространяться вдоль каждой из осей со скоростями соответственно определяемыми константами C_{11}, C_{22} и C_{33}. Подобным образом скорости чисто поперечных волн вдоль осей характеризуются константами C_{44}, C_{55} и C_{66}.

Глава 3

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ГОРНЫХ ПОРОД

ВВЕДЕНИЕ

Как указывалось выше, однородность не является абсолютным параметром вещества, но представляет понятие, применимое к средним свойствам, характеризующим некоторые разумно выбранные объемы. Даже самый однородный материал состоит из атомов, поэтому его свойства существенно неоднородны, если его рассматривать в достаточно малом объеме. И, напротив, материал, состоящий из существенно различных структурных элементов, может быть в высшей степени однородным в большом объеме. Если бы выбор характерного размера был совершенно произволен, то термин «однородность» был бы бесполезным. В конкретных ситуациях всегда имеется некоторый размер, лежащий в основе масштаба измерений. В случае распространения упругих волн таким размером является длина волны. Среда однородна, если средние свойства элементарных объемов не зависят от их расположения. Элементарный объем определяется как наибольший объем, линейные размеры которого малы по сравнению с самой короткой длиной волны в ее спектре. Эти критерии использовались многими исследователями, занимавшимися изучением распространения звука в гетерогенных средах. Ниже мы будем рассматривать слоистые твердые тела, зернистые среды, трещиноватые породы и жидкие суспензии с целью показать, как для таких материалов могут быть получены упругие модули и скорости. Такой подход применим также для структур с другой геометрией, например, к волокнистым твердым телам или тонким концентрическим цилиндрам.

ТОНКОСЛОИСТЫЕ СРЕДЫ

Бругеман [28] был первым исследователем, который вычислил эффективные упругие константы для тонкослоистых сред. Он показал, что такие среды имеют ось симметрии и характеризуются пятью упругими константами. Бругеман [29] опубликовал близкую по теме работу по электрическим и термальным свойствам тонкослоистых и других сложных сред, отметив, что подобные исследования выполнялись в течение предшествующих 60 лет. Более поздние иследователи изучали упругие свойства тонкослоистых сред [8, 67, 122, 129, 130, 136] в ряде случаев независимо от предшествующих публикаций. Несмотря на некоторое дублирование, эти работы отличаются подходами к исследованию и областями применения; поэтому каждая из них вносит определенный вклад в рассматриваемую проблему.

Средние упругие константы

Ниже рассматриваются некоторые простые комбинации напряжений, приложенных к элементарному кубу, показанному на рис. 3.1, и вычисляются результирующие деформации. Показанные здесь слои из двух материалов не обязательно должны быть идентичными таким же слоям в некоторых других элементарных кубах, взятых из различных частей тонкослоистых сред, но средние свойства всех таких кубов предполагаются одинаковыми. Следовательно, следующий шаг состоит в том, чтобы выразить средние напряжения и деформации в кубе через напряжения и деформации, существующие в отдельных слоях. Для частных комбинаций напряжений, рассматриваемых в каждом конкретном случае, удается выразить среднее напряжение как пропорциональное средней деформации. Затем, используя формулы (2.58), убедимся, что связь напряжений и деформаций отвечает поперечно-изотропной среде для тех же самых комбинаций напряжений. Таким образом, устанавливается эквивалентность между упругими константами поперечно-изотропного тела и коэффициентами пропорциональности, полученными для тонкослоистой среды. Рассматривая по порядку пять комбинаций напряжений, мы получим выражение для пяти упругих констант поперечно-изотропной среды через свойства тех двух материалов, из которых составлена рассматриваемая тонкослоистая среда.

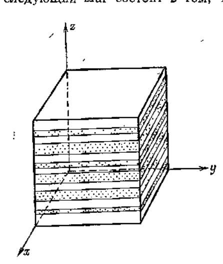


Рис. 3.1. Элементарный куб тонкослоистой среды

Первую комбинацию напряжений представляет нормальное напряжение p_{zz} на верхней и нижней гранях плюс нормальные напряжения на боковых гранях, достаточные, чтобы предотвратить любые перемещения вдоль осей x и y. Касательные напряжения в этом случае отсутствуют. Индексами 1 и 2 обозначены свойства двух изотропных материалов, составляющих отдельные слои. Тогда условия равновесия внутри каждого из слоев согласно уравнениям (2.2) определяются так:

$$p_{zz1}=(\lambda_1+2\mu_1)e_{zz1},$$
$$p_{zz2}=(\lambda_2+2\mu_2)e_{zz2}. \qquad (3.1)$$

Поскольку вертикальная компонента нормального напряжения непрерывна на границах между слоями, она постоянная всюду и $\bar{p}_{zz}=p_{zz1}=p_{zz2}$. Если h_1 есть суммарная мощность первого мате-

риала, то изменение мощности, обусловленное этим материалом, есть $h_1 e_{zz1}$. Подобным же образом изменение мощности второго материала будет $h_2 e_{zz2}$.

Средняя деформация равна общему изменению мощности, деленному на суммарную мощность, т. е. $(h_1 e_{zz1}+h_2 e_{zz2})/(h_1+h_2)$.

Удобно оперировать относительными долями каждого материала, введя обозначения $\eta_1=h_1/(h_1+h_2)$ и $\eta_2=h_2/(h_1+h_2)$. Тогда получим следующую связь между средним напряжением и средней деформацией:

$$\bar{p}_{zz}=\{1/[\eta_1/(\lambda_1+2\mu_1)+\eta_2/(\lambda_2+2\mu_2)]\}\bar{e}_{zz} \tag{3.2}$$

Если при рассмотрении соотношений (2.58) предположить, что p_{zz} действует в комбинации с нормальным напряжением в двух перпендикулярных направлениях, обеспечивающих равенство e_{xx} и e_{yy} нулю, то третье уравнение в (2.58) сводится к $p_{zz}=Ce_{zz}$. Таким образом, введенная здесь константа для тонкослоистой среды отвечает упругой константе C для эквивалентной поперечно-изотропной среды. Используя черту сверху для обозначения средних свойств, выразим эту упругую константу тонкослоистой среды через упругие свойства ее изотропных составляющих

$$\bar{C}=1/[\eta_1/(\lambda_1+2\mu_1)+\eta_2/(\lambda_2+2\mu_2)]. \tag{3.3}$$

Вторая комбинация напряжений потребует большого манипулирования формулами, хотя по своей идее она также проста. Задача состоит в том, чтобы применить среднее нормальное напряжение $\bar{p}_{xx}$ в такой комбинации с $\bar{p}_{zz}$ и $\bar{p}_{yy}$, которая обеспечила бы равенство нулю деформаций $\bar{e}_{zz}$ и $\bar{e}_{yy}$. Это будет достигнуто приложением напряжений p_{xx1} и p_{xx2} к каждому из двух типов слоев, выписывая соответствующие деформации и применяя упомянутые выше условия к средним деформациям. В тонких слоях $\bar{e}_{yy}=e_{yy1}=e_{yy2}$ во всем рассматриваемом объеме. Поэтому, положив $\bar{e}_{yy}=0$, мы устраним y-компоненту деформации из соотношений (2.2). Однако $\bar{e}_{zz}=\eta_1 e_{zz1}+\eta_2 e_{zz2}$, поэтому из равенства нулю средней деформации вовсе не следует отсутствие деформации в отдельных слоях. Под действием напряжений мощность одного из материалов увеличивается, а другого — уменьшается. Поэтому в правых частях соотношений (2.2) необходимо сохранить два слагаемых для каждого материала:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx1} &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\, e_{xx1} + \lambda_1 e_{zz1}, \\ p_{zz1} &= \lambda_1 e_{xx1} + (\lambda_1 + 2\mu_1)\, e_{zz1}, \\ p_{xx2} &= (\lambda_2 + 2\mu_2)\, e_{xx2} + \lambda_2 e_{zz2}, \\ p_{zz2} &= \lambda_2 e_{xx2} + (\lambda_2 + 2\mu_2)\, e_{zz2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Следующее условие, которое мы должны учесть, состоит в том, что $\bar{e}_{xx}=e_{xx1}=e_{xx2}$; $\bar{p}_{zz}=p_{zz1}=p_{zz2}$; $\bar{p}_{xx}=\eta_1 p_{xx1}+\eta_2 p_{xx2}$. Этих условий достаточно, чтобы получить прямую пропорциональную зависимость $\bar{p}_{xx}$ от $\bar{e}_{xx}$. Если такую же комбинацию напряжений применить к элементу поперечно-изотропной среды, то первая из фор-

мул (2.58) сведется к $p_{xx}=Ae_{xx}$. Таким образом, только что полученный коэффициент пропорциональности соответствует упругой константе A для поперечно-изотропной среды, т. е.

$$\bar{A}=\bar{C}\left[1+4\eta_1\eta_2\frac{(\mu_1-\mu_2)(\lambda_1+\mu_1-\lambda_2-\mu_2)}{(\lambda_1+2\mu_1)(\lambda_2+2\mu_2)}\right] \tag{3.5}$$

Если к элементарному кубу приложено только касательное напряжение p_{xy}, действующее на вертикальные срезы слоев, то все движение будет осуществляться в плоскости xy и тогда единственными, вытекающими из (2.2) соотношениями будут:

$$p_{xy1}=\mu_1 e_{xy1}, \quad p_{xy2}=\mu_2 e_{xy2}. \tag{3.6}$$

Поскольку слои тонкие, смещение во внутренних точках любого слоя не может сильно отличаться от смещения на его границах. Отсюда вытекает предположение об идентичности деформации во всех слоях, т. е. $\bar{e}_{xy}=e_{xy1}=e_{xy2}$. Касательные напряжения имеют различные значения для каждого из материалов, поэтому $\bar{p}_{xy}=\eta_1 p_{xy1}+\eta_2 p_{xy2}$. Эти соотношения в результате дают следующую зависимость:

$$\bar{p}_{xy}=(\eta_1\mu_1+\eta_2\mu_2)\,\bar{e}_{xy}. \tag{3.7}$$

Если в соотношениях (2.58) только напряжение p_{xy} отлично от нуля, то оно сведется к равенству $p_{xy}=Ne_{xy}$. Поэтому третья средняя упругая константа тонкослоистой среды

$$\bar{N}=\eta_1\mu_1+\eta_2\mu_2 \tag{3.8}$$

Четвертая упругая константа может быть получена в предположении, что единственное отличное от нуля напряжение совпадает с p_{yz}, которое действует как касательная сила, приложенная к плоскостям, перпендикулярным к осям x и z. Тогда согласно (2.2) получим

$$p_{yz1}=\mu_1 e_{yz1}, \quad p_{yz2}=\mu_2 e_{yz2}. \tag{3.9}$$

Из условия непрерывности касательных напряжений на границе, перпендикулярной к оси z, следует, что $\bar{p}_{yz}=p_{yz1}=p_{yz2}$. При равных напряжениях менее жесткий материал будет деформироваться сильнее, чем более жесткий, и средняя деформация сдвига оказывается равной средневзвешенной сдвиговой деформации обоих материалов $\bar{e}_{yz}=\eta_1 e_{yz1}+\eta_2 e_{yz2}$. Комбинируя полученные соотношения, найдем следующую пропорциональную зависимость:

$$\bar{p}_{yz}=[1/(\eta_1/\mu_1+\eta_2/\mu_2)]\,\bar{e}_{yz}. \tag{3.10}$$

Если в уравнениях (2.58) все напряжения, кроме p_{yz}, положить равными нулю, то получим $p_{yz}=Le_{yz}$. Следовательно, коэффициент пропорциональности в (3.10) соответствует константе

$$\bar{L}=1/(\eta_1/\mu_1+\eta_2/\mu_2). \tag{3.11}$$

Пятая комбинация включает нормальное напряжение p_{xx}, приложенное к плоскостям, перпендикулярным к оси x, и нормальное напряжение p_{yy}, необходимое, чтобы обеспечить отсутствие

смещения вдоль оси y. Верхние и нижние поверхности куба свободны от напряжений. Тогда третье уравнение из соотношения (2.2) будет иметь следующий вид:

$$\lambda_1 e_{xx1} + (\lambda_1 + 2\mu_1) e_{zz1} = 0,$$
$$\lambda_2 e_{xx2} + (\lambda_2 + 2\mu_2) e_{zz2} = 0 \qquad (3.12)$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что $\bar{e}_{xx} = e_{xx1} = e_{xx2}$, а $\bar{e}_{zz} = \eta_1 e_{zz1} + \eta_2 e_{zz2}$. Эти четыре условия ведут к пропорциональной зависимости между $\bar{e}_{zz}$ и $\bar{e}_{xx}$:

$$\bar{e}_{zz} = -\left[\frac{\eta_1 \lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{\eta_2 \lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\right] \bar{e}_{xx}. \qquad (3.13)$$

Если в уравнениях (2.58) положить p_{zz} и e_{yy} равными нулю, то

$$e_{zz} = -(F/C) e_{xx}. \qquad (3.14)$$

Сравнивая (3.14) с (3.13), получим отношение $\bar{F}/\bar{C}$, а поскольку $\bar{C}$ уже найдено, то легко получить выражение и для упругой константы

$$\bar{F} = \left[\frac{\eta_1 \lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{\eta_2 \lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\right] \frac{1}{\eta_1/(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta_2/(\lambda_2 + 2\mu_2)}. \qquad (3.15)$$

Заметим, что плотность тонкослоистой среды определяется как средняя взвешенная плотность ее составляющих, т. е.:

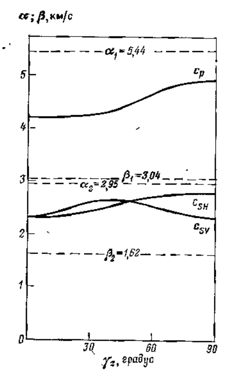
$$\bar{\rho} = (\eta_1 \rho_1 + \eta_2 \rho_2). \qquad (3.16)$$

Некоторые из авторов [8, 136] получили те же упругие константы более строгими методами, которые позволяют доказать, что имеется поперечно-изотропная среда, свойства которой равны средним свойствам заданной тонкослоистой среды. Проделанные выше выкладки показывают, что выражения для средних упругих констант могут быть выведены на основе весьма простых рассуждений.

Примеры

Теоретические исследования тонкослоистых сред стимулировались экспериментальными данными, свидетельствующими об анизотропности верхней части земной коры. Многие разрезы осадочных пород состоят из тонких слоев с контрастными свойствами, поэтому возник вопрос, можно ли наблюдаемую анизотропию полностью объяснить следствием тонкослоистости отдельных слоев, самих по себе изотропных. Постма [122] вычислил скорости распространения плоских волн как функцию направления в случае тонкослоистой среды, состоящий из перемежающихся песчаников и известняков, пытаясь оценить анизотропию, которую можно ожидать только в результате слоистости. Для известняков он принял следующие параметры: $\rho_1 = 2{,}7$ г/см^3, $\mu_1 = 2{,}5 \times 10^{11}$ дин/см^2 и $\lambda_1 = 3 \times 10^{11}$ дин/см^2; для песчаников: $\rho_2 = 2{,}3$ г/см^3, $\mu_2 = 0{,}6 \times 10^{11}$ дин/см^2 и $\lambda_2 = 0{,}8 \times 10^{11}$ дин/см^2. Полученные им данные при

$\eta_1=0,75$ и $\eta_2=0,25$ приведены на рис. 3.2. Эти характеристики слоев были затем подставлены в формулы, эквивалентные приведенным выше. Полученные средние упругие константы после подстановки в уравнения (2.66) и (2.67) определяют зависимость скорости от угла. Отношение скорости продольных волн в горизонтальном направлении и скоростей этих же волн в вертикальном направлении оказывается равным 1,16. Это значение попадает в диапазон экспериментально наблюдавшихся отношений согласно таблицам, составленным Уригом и Ван Меллем [165] для ряда формаций по литературным данным. Уайт и Ангона [185] вычислили скорость квазипродольных волн в тонкослоистой



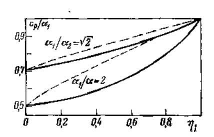


Рис. 3.2. Индикатрисы скоростей плоских продольных и поперечных волн для тонкослоистой среды [122]

Рис. 3.3. Зависимость скорости продольных волн, распространяющихся горизонтально (пунктирная линия) и вертикально (сплошная линия), от относительной доли высокоскоростной компоненты [185]

среде как функцию относительной доли отдельных слоев. На рис. 3.3 изображены отнесенные к α_1 скорости квазипродольных волн, вычисленные при $\lambda_1=\mu_1$, $\lambda_2=\mu_2$ и $\rho_1=\rho_2$. Для верхней пары кривых $\lambda_1+2\mu_1=2(\lambda_2+2\mu_2)$; для нижней пары $\lambda_1+2\mu_1=4(\lambda_2+2\mu_2)$. Максимальное отношение скоростей распространения волн в горизонтальном и вертикальном направлениях равно 1,05 для верхней пары кривых (где отношение скоростей в двух слоях есть $\sqrt{2}$) и 1,23 для нижней пары кривых (для которой отношение скоростей равно 2).

Многочисленные наблюдения показывают, что многие геологические формации состоят из отчетливо различимых слоев толщи-

ной от 1 см до нескольких метров, поэтому наблюдаемая анизотропия является главным образом результатом слоистости. Однако глинистые сланцы обладают хорошо выраженной анизотропией, хотя слоистость может не наблюдаться ни по данным каротажа скважин, ни визуально по керну. Поскольку глинистые сланцы принято считать однородными, полезно рассматривать их анизотропию как внутреннюю. Для геологических разрезов, состоящих из последовательно чередующихся глинистых сланцев и песчаников, анизотропия в большом объеме будет связана частично со слоистостью, а частично с внутренней анизотропией сланцев. Средние упругие характеристики для тонкослойной среды с анизотропными слоями были получены Бакусом [8].

Многокомпонентные тонкослоистые среды

До сих пор предполагалось, что слоистая среда состоит только из двух групп слоев. Хелбиг [67] и Бакус [8] получили выражения для средних (эффективных) упругих констант тонкослоистой среды, которая может иметь произвольное число групп слоев с различными свойствами. В этом случае для константы $\bar{C}$ вместо (3.3) получим следующее выражение:

$$\bar{C} = \left(\frac{\tau_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{\tau_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} + \frac{\tau_3}{\lambda_3 + 2\mu_3} + \ldots\right)^{-1}.$$

Величина в скобках представляет собой средневзвешенное значение для $1/(\lambda+2\mu)$. Если использовать скобки $\langle \ldots \rangle$ для обозначения средневзвешенного значения, заключенного внутри выражения, то выведенные выше упругие константы могут быть записаны для тонкослоистой среды с произвольным числом изотропных компонент:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{A} &= \left\langle \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\lambda+2\mu} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \right\rangle^{2},\\
\bar{C} &= \left\langle \frac{1}{\lambda+2\mu} \right\rangle^{-1},\\
\bar{F} &= \left\langle \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\lambda+2\mu} \right\rangle^{-1},\\
\bar{L} &= \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1},\\
\bar{N} &= \langle \mu \rangle,\\
\bar{\rho} &= \langle \rho \rangle.
\end{aligned}\right\} \quad (3.17)$$

Суспензии и эмульсии

На практике встречаются ситуации, когда волна распространяется через породы, состоящие из твердого скелета, заполненного флюидами. В этих случаях необходимо знать, как эффективные параметры составного материала зависят от индивидуальных

свойств его составляющих и от структурных характеристик скелета.

Некоторые исследователи [166, 198, 109, 153, 143], изучавшие распространение волн в осадках океанического дна и в других флюидонасыщенных средах, сравнили свои экспериментальные данные с формулой Вуда [195] для скоростей продольных волн в такой многокомпонентной среде. Эта формула применима к эмульсиям или суспензиям твердых частиц, взвешенных в сплошной жидкой фазе. При этом использовалось предположение, что в пределах элементарного объема все компоненты движутся вместе, поэтому эффективная плотность совпадает со средневзвешенной по объему плотностью обеих компонент, $\rho=\eta_f\rho_f+\eta_s\rho_s$. Предполагалось также, что эффективный объемный модуль (модуль всестороннего сжатия) составной среды такой же, как и при статистическом сжатии элементарного объема: при возрастающем давлении каждая компонента сжимается согласно собственному объемному модулю, $\Delta V_f/V_f=-p/k_f$ и $\Delta V_s/V_s=-p/k_s$. Сумма изменений индивидуальных объемов, поделенных на общий объем, есть — $\Delta V/V=pV_f/k_fV+pV_s/k_sV$. Отсюда следует, что эффективный объемный модуль $k=(\eta_f/k_f+\eta_s/k_s)^{-1}$. Скорость волн сжатия в двухкомпонентной смеси этого типа равна $(k/\rho)^{1/2}$, т. е.

$$c_P=\left[(\eta_f\rho_f+\eta_s\rho_s)\left(\frac{\eta_f}{k_f}+\frac{\eta_s}{k_s}\right)\right]^{-1/2}. \tag{3.18}$$

Юрик [166] показал, что эта формула адекватно отражает изменение скорости как функцию параметров составляющих смеси в случае водно-ксиленовой и водно-нефтяной эмульсий, а также для каолиновых суспензий. Нэйф и Дрэйк [109] и Саттон, с соавторами [153] обнаружили, что их измерения сильно пористых океанических осадков тоже достаточно хорошо согласуются с уравнением Вуда. Они предложили эмпирически выведенную модификацию с целью улучшения связи между скоростями и пористостью. Шамвэй [143] успешно применил формулу Вуда для зависимости скорости звука от температуры в различных водонасыщенных породах; при этом он обнаружил, что в случае тонкозернистых песчаников нельзя пренебрегать жесткостью скелета. Согласно Уилли и др. [198] скорости во флюидонасыщенных агрегатах, состоящих из сферических зерен, выше скоростей, подсчитанных по формуле Вуда. Эти авторы сделали вывод, что формула Вуда (3.18) адекватна скорости звука в эмульсиях и суспензиях, но эта простая модель неприменима к флюидонасыщенным средам, твердый скелет которого имеет значительную жесткость.

Более строгие исследования показали, что движение взвешенных частиц не точно синхронно с движением окружающего флюид вещества, следовательно, использованные выше выражения для плотности недостаточно точные в случае больших перепадов плотностей [89]. Было также показано, что при наличии пузырьков газа в жидкости доминирующим механизмом являются резонансные явления в газовых пузырьках [4]. Тем не менее приведенная простая формула имеет свою область применения.

ТЕОРИЯ ГАССМАНА ФЛЮИДОНАСЫЩЕННЫХ ПОРОД

Многие осадочные породы состоят из пористого скелета, заполненного водой. Скелет может быть образован зернами, прижатыми друг к другу, под воздействием веса вышележащих пород и некоторого количества цементирующего материала. Скелет можно также рассматривать как непрерывную матрицу, содержащую связанные раствором каналы и пустоты, либо представляющую собой массу трещиноватых пород, в которых пористость обусловлена трещинами между слабо смещенными блоками. Те редкие ситуации, когда поровое пространство насыщено газом или нефтью, представляет особый интерес в связи с возможным влиянием состава флюида на сейсмические скорости и другие свойства пористых пород.

Чтобы решить данную задачу с наименьшим числом упрощающих предположений, Гассман [59, 60] предположил, что свойства скелета могут быть каким-то образом измерены, после чего он получил формулы соответствующих свойств породы, насыщенной любым флюидом с заданными параметрами. При этом он допустил, что любые относительные движения между флюидом и скелетом пренебрежимо малы по сравнению с движением самой насыщенной породы, что интуитивно оправдано для низких частот. Было также показано, что любая анизотропия скелета будет проявляться и для всей породы в целом. Для простоты мы будем обсуждать ситуации, когда скелет состоит из упругого изотропного материала, и средние его характеристики также изотропны.

Связи между упругими константами

Сделаем некоторое отступление, напомнив описание изотропных тел и определение их констант. В частности, при формулировке закона Гука в уравнениях (2.2) использовались параметры Ламе λ и μ. В случае плоской волны, описываемой выражением (2.6), первая формула в (2.2) редуцируется в соотношение $p_{xx}=(\lambda+2\mu)e_{xx}$. Для удобства мы положим $M=(\lambda+2\mu)$ и будем называть эту величину *модулем плоского деформирования*, поскольку скорость распространения продольной плоской волны $\alpha=(M/\rho)^{1/2}$. Аналогично уравнение (2.12) описывает плоскую поперечную волну, распространяющуюся со скоростью $\beta=(\mu/\rho)^{1/2}$, где μ есть модуль сдвига или жесткости. Модуль Юнга равен коэффициенту пропорциональности между напряжением и деформацией при растяжении (удлинении) тонкого стержня. Закон Гука в применении к этому стержню записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= (\lambda+2\mu)e_{xx}+\lambda e_{yy}+\lambda e_{zz},\\ \lambda e_{xx} &+ (\lambda+2\mu)e_{yy}+\lambda e_{zz}=0,\\ \lambda e_{xx} &+ \lambda e_{yy}+(\lambda+2\mu)e_{zz}=0. \end{aligned}\right\} \quad (3.19)$$

Принимая во внимание, что $e_{yy}=e_{zz}$, запишем выражения для модуля Юнга E и коэффицнента Пуассона ν:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_{xx}}{e_{xx}} &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)} = E, \\ -\frac{e_{yy}}{e_{xx}} &= \lambda/2(\lambda+\mu) = \nu. \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

Другой широко используемый упругий параметр — модуль всестороннего сжатия (объемный модуль) характеризует степень сопротивления среды сжатию (или несжимаемость). Он определяется как взятое со знаком минус отношение нарастающего напряжения

ТАБЛИЦА 3.1

УПРУГИЕ КОНСТАНТЫ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Константы	λ, μ	M, μ	k, μ	E, ν
Модуль плоского деформирования M	$(\lambda+2\mu)$	M	$\frac{(3k+4\mu)}{3}$	$\frac{(1-\nu)E}{(1-\nu-2\nu^2)}$
Модуль сдвига μ	μ	μ	μ	$\frac{E}{2(1-\nu)}$
Модуль всестороннего сжатия k	$\frac{(3\lambda+2\mu)}{3}$	$\frac{(3M-4\mu)}{3}$	k	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$
Модуль Юнга E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}$	$\frac{\mu(3M-4\mu)}{(M-\mu)}$	$\frac{9\mu k}{(\mu+3k)}$	E
Коэффициент Пуассона ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{(M-2\mu)}{2(M-\mu)}$	$\frac{(3k-2\mu)}{2(3k+\mu)}$	ν
Константа Ламэ λ	λ	$(M-2\mu)$	$\frac{(3k-2\mu)}{3}$	$\frac{\nu E}{(1-\nu-2\nu^2)}$

Δp к относительному изменению в объеме $\Delta V/V$, т. е. $-\Delta p = k\Delta V/V$. В условиях гидростатического давления, приложенного к твердому телу, закон Гука запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} -\Delta p &= (\lambda+2\mu)e_{xx} + \lambda e_{yy} + \lambda e_{zz}, \\ -\Delta p &= \lambda e_{xx} + (\lambda+2\mu)e_{yy} + \lambda e_{zz}, \\ -\Delta p &= \lambda e_{xx} + \lambda e_{yy} + (\lambda+2\mu)e_{zz}. \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

Эти три уравнения плюс соотношение $(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}) = \Delta V/V$ в результате дают

$$k = (3\lambda+2\mu)/3. \tag{3.22}$$

Соотношения между различными упругими константами приведены в табл. 3.1.

Вывод формул

В теории Гассмана предполагается, что скелет состоит из однородного изотропного упругого материала с плотностью ρ_s и модулем всестороннего сжатия k_s. Сухой скелет имеет пористость Φ и среднюю плотность $\bar{\rho}$, модуль всестороннего сжатия $\bar{k}$, модуль сдвига $\bar{\mu}$ и модуль плоского деформирования $\bar{M}$. Флюид, насыщающий поровое пространство, имеет плотность ρ_f и модуль всестороннего сжатия k_f. Средние свойства флюидонасыщенной породы суть плотность ρ, модуль всестороннего сжатия k, модуль сдвига μ и модуль плоского деформирования M. Задача состоит в том, чтобы выразить эти свойства насыщенной флюидом породы в терминах заданных свойств флюида и скелета.

Гассман предположил, что флюид и частицы скелета движутся вместе, поэтому плотность ρ получается простым усреднением двух плотностей:

$$\rho=\Phi\rho_f+(1-\Phi)\rho_s. \qquad (3.23)$$

Было сделано также предположение, что флюид не оказывает такого воздействия на твердую фазу, которое молго бы изменить модуль сдвига скелета. Следовательно,

$$\mu=\bar{\mu}. \qquad (3.24)$$

Чтобы закончить описание флюидонасыщенной породы, требуется еще одна упругая константа. Гассман выбрал модуль всестороннего сжатия. Можно мысленно представить изолированный куб водонасыщенной породы, подвергаемый возрастающему напряжению Δp на всех гранях, приводящему к относительному изменению объема $(\Delta V/V)$. Взятые со знаком минус отношения этих величин представляют модуль всестороннего сжатия:

$$k=-\Delta p/(\Delta V/V). \qquad (3.25)$$

Заметим, что поскольку сила, отнесенная к единичной площади флюидонасыщенной породы, представляет нормальное напряжение, то $\Delta p=-p_{xx}=-p_{yy}=-p_{zz}$. Если обозначить ту часть силы, действующей на скелет, которая удерживает его, чертой сверху, то $\Delta\bar{p}=-\bar{p}_{xx}=-\bar{p}_{yy}=-\bar{p}_{zz}$. Общее давление Δp — это сумма давлений на скелет $\Delta\bar{p}$ и давления в жидкости Δp_f:

$$\Delta p=\Delta\bar{p}+\Delta p_f. \qquad (3.26)$$

Поскольку твердый материал и жидкость движутся вместе, как если бы граница куба была непроницаема, общее приращение объема совпадает с суммой приращения объема флюида и объема скелета: $\Delta V=\Delta V_f+\Delta V_s$. Изменения объема флюида, обусловленные приращением давления, $\Delta V_s=-\Phi V\Delta p_s/k_s$. Под воздействием давления в жидкости скелет также сжимается на величину $\Delta V_{s1}=-(1-\Phi)V\Delta p_s/k_s$. Однако имеется и дополнительное изменение давления, приложенного непосредственно к скелету, $\Delta V_{s2}=$

$=-V\Delta\bar{p}/k_s$. Этот факт упоминался Кри и Лявом [95]. Согласно Ляву тело любой формы, сжимаемое между двумя параллельными плоскостями с расстоянием c между ними, будет иметь объем, уменьшенный на $pc/3k$, где p — результирующее давление на каждой из плоскостей. Таким образом, p играет роль силы, а не давления. Мы применим это выражение (с учетом сделанных поправок) к упругому телу, состоящему из куба с размерами Δx, Δy и Δz. Для $\Delta\bar{p}$, приложенному к x-граням, сила равна $\Delta\bar{p}\Delta y\Delta z$, а расстояние Δx. Соответствующее изменение объема равно $-\Delta\bar{p}\Delta y\Delta z\times\Delta x/3k_s=-\Delta\bar{p}/3k_s$. Прибавляя к этой величине приращение объема, вызванное давлением скелета $\Delta\bar{p}$, приложенного к y-граням и z-граням, получим приведенное выше значение ΔV_{s2}. Суммируя все приращения объемов, получим

$$\frac{\Delta V}{V}=\left[-\frac{\Phi}{k_f}-\frac{(1-\Phi)}{k_s}\right]\Delta p_f-\frac{1}{k_s}\Delta\bar{p}. \qquad (3.27)$$

Другое соотношение вытекает из рассмотрения изменения объема элементарного куба. При изменении одного только давления в скелете возникают соответствующие изменения его объема, контролируемые объемным модулем k: $\Delta V_1=-V\Delta\bar{p}/k$. Если давление флюида увеличивается, скелет в целом уменьшается в объеме, и чтобы поддержать постоянное давление на скелет, грани должны переместиться навстречу друг другу, вызывая изменение объема куба $\Delta V_2=-\Delta Vp_f/k_s$. Таким образом, в ответ на приращения давлений $\Delta\bar{p}$ и Δp_f объем куба изменится следующим образом:

$$\frac{\Delta V}{V}=-\frac{1}{k_s}\Delta p_f-\frac{1}{\bar{k}}\Delta\bar{p}. \qquad (3.28)$$

Решая последние три уравнения, получим

$$k=\frac{\Phi/k_s-\Phi/k_f-1/\bar{k}+1/k_s}{(\Phi/\bar{k})(1/k_s-1/k_f)-(1/k_s)(1/\bar{k}-1/k_s)}.$$

Добавляя и вычитая $\bar{k}$ в правой части последнего равенства и осуществляя алгебраические преобразования, получим, что модуль всестороннего сжатия флюидонасыщенной породы равен модулю сжатия скелета плюс член, зависящий от флюида:

$$k=\bar{k}+\frac{(1-\bar{k}/k_s)^2}{[\Phi/k_f+(1-\Phi)/k_s-\bar{k}/k_s^2]}. \qquad (3.29)$$

Поскольку $\mu=\bar{\mu}$, мы можем добавить $4\mu/3$ к левой и правой частям последнего равенства, в результате чего получим выражения для модуля плоского деформирования:

$$M=\bar{M}+\frac{(1-\bar{k}/k_s)^2}{[\Phi/k_f+(1-\Phi)/k_s-\bar{k}/k_s^2]}. \qquad (3.30)$$

Поскольку флюидонасыщенный материал ведет себя на низких частотах как изотропное упругое тело, плоские продольные и поперечные волны будут распространяться со скоростями

$$c_P = (M/\rho)^{1/2}, \quad c_S = (\mu/\rho)^{1/2}. \tag{3.31}$$

Так как модуль сдвига при насыщении флюидом не изменяется, скорость c_S зависит от параметров флюида только через плотность, согласно равенству (3.23). Следовательно, скорость поперечных волн во флюидонасыщенных средах несколько меньше, чем в пустом скелете. Из уравнения (3.30) следует, что модуль всестороннего сжатия флюида влияет на величину M через отношение Φ/k_f. Влияние флюида должно уменьшаться с уменьшением пористости. Действительно, величина $\bar{k}$ зависит от пористости и стремится к k_s, когда пористость стремится к нулю. Для неконсолидированных песков величины Φ и $\bar{k}$ могут принимать такие значения, при которых скорость продольных волн исключительно сильно реагирует на содержание флюида.

Численный пример

При поисках нефти и газа природа флюида в потенциальном резервуаре становится решающим фактором. Поэтому можно установить, насколько хорошо теория Гассмана описывает влияние флюидонасыщения на распространение продольных волн в реальных пористых породах.

На рис. 3.4 изображены интервал диаграммы акустического каротажа и соответствующая кривая плотности пород по данным гамма-гамма-каротажа для разреза, содержащего пористые песчаники мощностью примерно 30 м. Границы песчаника хорошо отмечаются на диаграмме ПС (самопроизвольной поляризации). Для упрощения предположим, что скелет песчаника не изменяется с глубиной и проверим, можно ли резкое изменение скорости и небольшое изменение плотности на контакте газ — вода объяснить с позиции теории Гассмана. Примем, что песчаник является чистым кварцитом с параметрами $\rho_s=2{,}65$ г/см³ и $k_s=35\times10^{10}$ дин/см². Для природного газа на глубинах 2200 м можно положить $\rho_g=0{,}14$ г/см³ и $k_g=0{,}02\times10^{10}$ дин/см². Принебрегая поправками на соленость и температуру, примем для воды $\rho_w=1{,}0$ г/см³ и $k_w=2{,}2\times10^{10}$ дин/см².

Принимая во внимание приведенные данные и измеренное значение плотности для флюидонасыщенной породы, уравнение (3.23) можно решить относительно пористости: $\Phi=(\rho_s-\rho)/(\rho_s-\rho_f)$. Если среднюю плотность в газонасыщенном интервале разреза взять равной 2,05 г/см³, то вычисленная пористость окажется равной 0,24. При средней плотности 2,2 г/см³ для водонасыщенного интервала пористость оказывается равной 0,27. Учитывая имеющиеся флуктуации на кривых плотности, разумно принять величину 0,25 как среднюю пористость песчаника.

Следующий шаг состоит в том, чтобы проверить, насколько сов-

падает модуль $\bar{M}$ в обоих интервалах. Если взять среднее время первого вступления в газонасыщенном интервале, равным 160 мкс, получим скорость 1900 м/с и плотность 2,05 г/см³, что дает значение модуля плоского деформирования $M = 7{,}4 \times 10^{10}$ дин/см². Если бы отношение $\bar{k}/k_s$ было известно, то для определения M можно было бы использовать формулу (3.30). Мы будем опираться на эмпирическую связь, полученную по измерениям в сухих песчаниках [61]

$$\bar{k}/k_s = (1 + 50\Phi)^{-1}. \quad (3.32)$$

Влияние газа настолько мало, что $\bar{M} = 7{,}4 \times 10^{10}$ дин/см², что с высокой точностью совпадает с M. В водонасыщенной части раз-

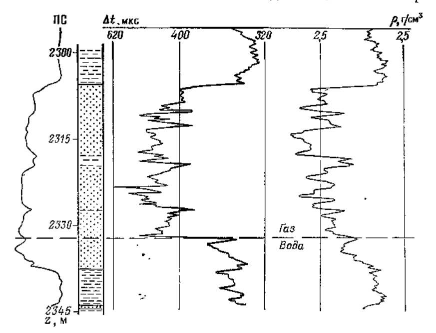


Рис. 3.4. **Диаграмма акустического каротажа в окрестности контакта газ — вода (по материалам компании Геоквест Интернейшн)**

реза время вступления равно 120 мкс, а скорость 2530 м/с, что дает модуль плоского деформирования $M = 14{,}1 \times 10^{10}$ дин/см². Слагаемое, характеризующее в (3.30) влияние флюидонасыщения, оценивается согласно (3.32) в $6{,}5 \times 10^{10}$ дин/см². Следовательно, модуль $\bar{M} = 7{,}6 \times 10^{10}$ дин/см². Приведенные оценки хорошо согласуются.

Таким образом, можно сделать вывод, что применение формул Гассмана для песчаников с однородным скелетом позволяет оценивать различия в скорости распространения и в плотности на газонефтяных контактах, которые находятся в соответствии с наблюдаемой по данным каротажа.

Предполагается, что таким же путем можно вычислить перепад скоростных характеристик, которые следует ожидать на контактах иной природы, например на водонефтяных.

ТЕОРИЯ БИО

Как было упомянуто выше, теория Гассмана базируется на предположении, что относительное движение жидкости и скелета имеет пренебрежимо малое влияние на распространение сейсмических волн во флюидонасыщенных породах. Это предположение можно разумно обосновать для низких частот, но, к сожалению, в теории нет указаний на то, какие частоты можно с достаточной уверенностью рассматривать как низкие. Более того, легко понять, что относительное движение флюида и скелета должно вызвать потерю энергии благодаря вязкости флюида, а теория Гассмана не дает никаких средств оценки соответствующего затухания волн. Теория Гассмана без сомнения применима к сейсмологии и, возможно, к сейсморазведке, но по-видимому, не применима в килогерцовом диапазоне акустического каротажа и почти наверняка в мегагерцовом диапазоне при лабораторных измерениях.

Рассмотрим ниже более общую теорию, свободную от этих недостатков. Эта теория возникла при изучении поведения электрического потенциала во влажных почвах и звукопоглощающих материалах, используемых в атмосферной акустике. Первая работа в этом направлении принадлежит советскому физику Я. И. Френкелю [53]. Основные работы Био появились в 1956 г. [14, 15], а в дальнейшем (1962 г.) теория была им расширена [16]. Явления отражения — преломления на плоских границах рассматривались Джирсмой и Смиттом [61], Дересевичем и Райсом [38], Гарднер [58] применил ее к распространению волн в пористых стержнях, а Розенбаум [134] — к акустическому каротажу. В ряде работ было сделано сопоставление с экспериментальными данными [61, 117, 121, 198]. Численные расчеты отражений от плоских границ были опубликованы Уайтом [182].

Теория Био требует тех же самых констант для описания твердого материала и флюида, что и теория Гассмана, плюс еще несколько констант. Твердый материал определяется константами ρ_s и k_s. Для описания флюида в дополнение к ρ_f и k_f требуются сведения о вязкости η. Скелет, помимо $\bar{\rho}$, $\bar{\mu}$, $\bar{M}$, $\bar{k}$, Φ, характеризуется еще проницаемостью $\varkappa$. Био получил пару векторных дифференциальных уравнений, описывающих связанное совместное движение всех фаз в терминах среднего смещения флюида и твердого материала. Эти два уравнения, как показал Био, описывают и чисто дилатационные (продольные) и чисто поперечные волны. Им было доказано существование двух типов продольных волн — нормальной сейсмической и диффузионной (волны типа II), которая имеет пониженную частоту и характеризуется быстрым затуханием. Поскольку влияние вязкости флюида сказывается главным образом на затухание, более детальное обсуждение теории

Био будет дано в гл. 4, посвященной механизмам поглощения и потери энергии. Здесь отметим только, что Био определяет границу низкочастотной области:

$$f < 0{,}1\,(\eta\Phi/2\pi\varkappa\rho_f). \qquad (3.33)$$

В этом интервале результаты Био находятся в соответствии с выводами из теории Гассмана.

МОДЕЛЬ СФЕРИЧЕСКОЙ УПАКОВКИ ДЛЯ ЗЕРНИСТЫХ ПОРОД

По теории Гассмана средние упругие константы скелета необходимо либо измерять непосредственно, либо определять по данным измерений в условиях флюидонасыщения. Влияние предварительной нагрузки также нужно определять с помощью соответствующего измерения. Совершенно ясны те преимущества, которые дает математическая модель скелета, позволяющая вычислять средние

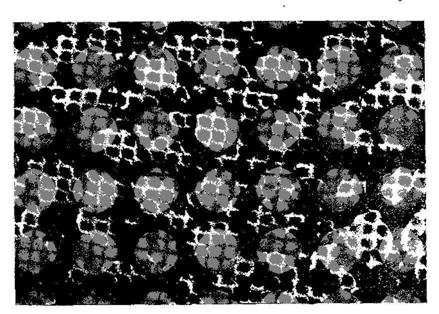


Рис. 3.5 Зерна сыпучего песка

упругие константы в зависимости от предварительного напряжения. Рассмотрим вначале модель сферической упаковки. Некоторые породы состоят из округлых зерен, контактирующих при различной степени сцементированности. Если бы естественно залегающий песок, структура которого показана на рис. 3.5, был бы погружен на некоторую глубину, то его упругие константы зависили бы главным образом от контактов между выпуклыми поверхностями.

Вблизи каждого такого небольшого участка контактирующие зерна можно аппроксимировать сферическими поверхностями с различными радиусами. Следовательно, теория поведения двух контактирующих сфер должна привести, например, к зависимости средней упругой константы от предварительного давления. Такая модель описана различными авторами. Основные теоретические выводы из этой модели были проверены экспериментально на сферических упаковках, а полевые эксперименты показали, что эти выводы также применимы к распространению сейсмических волн в неконсолидированных песках.

Первым, кто рассматривал ансамбль упругих контактирующих сфер, был Хара [63], который пытался описать работу карбонатно-гранулярного микрофона, используя теорию Герца [95, 158] для определения площади контактов и относительного смещения между сферами. Для сравнения большого количества экспериментальных данных по колонкам из сыпучих песков и различным другим агрегатам, состоящим из сферических зерен, Иида [73] применил формулу Герца к таким средам, в которых предварительное напряжение было обусловлено весом вышележащего материала, и получил в результате, что скорость должна изменяться как корень шестой степени от глубины. Хотя полученные указанными авторами выражения не вполне корректны, их расчеты послужили отправной точкой для многих исследователей, которые в дальнейшем использовали теорию Герца для определения сейсмических волн в различных сферических упаковках [22, 42, 60, 155, 187].

С целью подтверждения полученных значений был проведен ряд дополнительных измерений на сферических упаковках и сыпучих песках [85, 117, 138]. В теории Герца рассматриваются только те силы, которые действуют по нормалям к сферическим поверхностям в точках контакта. Уайт и Сэнгбуш [187], а также Даффи и Миндлин [42] установили, что силы в точках контакта имеют, как правило, и касательные составляющие, которые должны сильно влиять на эффективные упругие модули сферической упаковки. Относительное смещение двух сфер под воздействием касательной силы было рассчитано Каттанео [33], Миндлиным [104], а Даффи и Миндлин [42] объединили эти результаты с теорией Герца для вычисления скорости упругих волн в гранецентрированной кубической решетке сфер с учетом нормальных и боковых смещений. Хорошее согласие между вычисленными и измеренными скоростями указывает на то, что этот вариант теории адекватно описывает распространение волн в регулярной решетке (упаковке) сфер. В обзоре по механизму упругих сред Дересевич [37] указывает, что необходимы дополнительные теоретические исследования на моделях со случайной хаотической упаковкой одинаковых сфер, рассматривая это как шаг к исследованию сред со случайной упаковкой частиц произвольных размеров и форм.

Продольная волна, распространяющаяся вдоль оси упаковки

Чтобы понять, каким образом приращение деформации в точках контакта влияет на скорость распространения волн, воспользуемся простейшей кубической упаковкой сфер (рис. 3.6), в которой одинаковые сферы расположены параллельно координатным осям. Упругие волны обусловливают дополнительные напряжения по отношению к системе напряжений, существующей в состоянии покоя. Природа этого предварительно напряженного состояния яв-

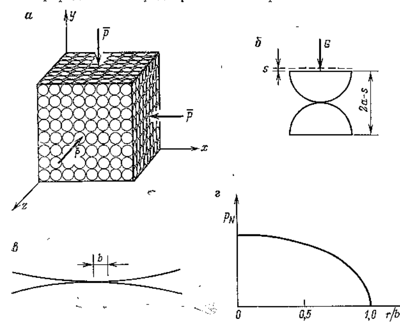


Рис 3.6. Кубическая упаковка сфер при изотропном начальном напряжении

ляется важной особенностью зернистой среды, которую необходимо уточнить в первую очередь. Сделаем предположение, что вдоль всех трех осей приложены равные нормальные напряжения с величиной $-\bar{p}$. Поэтому можно считать, что давление $\bar{p}$ приложено ко всем поверхностям. Это давление действует в среднем. Из геометрии упаковки легко видеть, что сила, поддерживающая один ряд сфер, равна $G=4a^2\bar{p}$, где a — радиус сферы. Под воздействием силы G центры двух касающихся сфер оказываются сближенными на расстояние s (рис. 3.6, *б*). Контакт имеет форму плоского круга радиуса b, а сфера деформируется только в непосредственной окрестности контакта (рис. 3.6,*в*). Нормальные напряжения имеют наибольшую величину в центре контакта и изменяются по радиусу согласно графику на рис. 3.6, *г*. Условия, количественно выражающие контакт этого типа между двумя упругими сферами

и составляющими частный случай полученных Герцем соотношений [95, 158], таковы:

$$
\left.\begin{aligned}
b &= \left[\frac{3(1-\nu_s^2)\,aG}{4E_s}\right]^{1/3},\\
s &= \left[\frac{9(1-\nu_s^2)^2\,G^2}{2E_s^2\,a}\right]^{1/3},\\
p_N &= -\frac{3G}{2\pi b^2}\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)^{1/2}.
\end{aligned}\right\}
\qquad (3.3)
$$

Упругость этой упаковки к дальнейшим деформациям обязана предварительному нагружению. Отсюда следует, что чем больше первоначальная площадь контакта, тем жестче скелет.

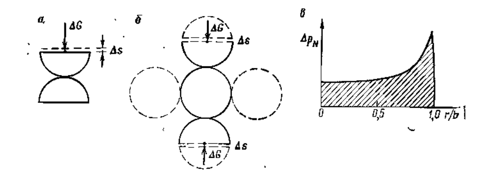


Рис. 3.7. Поведение кубической упаковки сфер при возрастающей нормальной нагрузке

Использование теории Герца для вывода упругих констант и определения скорости распространения упругих волн проиллюстрируем на простом примере. Для любой зернистой среды искомая упругая константа может быть выражена через отношение среднего напряжения к средней деформации. Очевидно, что среднее напряжение $\bar{p}_{yy}$, приложенное к элементу, показанному на рис. 3.6, *а*, может быть выражено через силу G. Окончательное смещение в направлении оси y может быть выражено через среднюю деформацию $\bar{e}_{yy}$. Пусть вдоль одной из осей кубической упаковки распространяется плоская продольная волна. Дополнительное смещение между центрами двух соседних сфер Δs, возникающее в результате приложения добавочной силы $\Delta G = -4a^2\bar{p}_{yy}$, показано на рис. 3.7, *а*. Эта дополнительная сила создает нормальное напряжение Δp_N, которое неравномерно распределено на площади контакта (рис. 3.7, *в*). Типичная конфигурация примыкающих сфер показана на рис. 3.7, *б*, из которого видно, что средняя деформа-

ция равна $\bar{e}_{yy} = -\Delta s/2a$. Вычисляя приращение Δs, согласно второй формуле (3.34), получим

$$\frac{\Delta G}{\Delta s} = \left[\frac{3E_s^2\, aG}{4(1-\nu_s^2)^2}\right]^{1/3} = \frac{2\mu_s\, b}{1-\nu_s}. \quad (3.35)$$

С учетом приведенных выше определений средних напряжений и деформации получим выражение для упругого модуля [см. формулу (2.75)]:

$$\frac{\bar{p}_{yy}}{\bar{e}_{yy}} = \bar{C}_{11}\left[\frac{3E_s^2\, G}{32(1-\nu_s^2)^2 a^2}\right]^{1/3} = \left[\frac{3E_s^2\, \bar{p}}{8(1-\nu_s^2)^2}\right]^{1/3}. \quad (3.36)$$

Средняя плотность равна массе единичной сферы на объем описанного куба:

$$\bar{\rho} = \pi\rho_s/6. \quad (3.37)$$

Скорость продольной волны вдоль оси простой кубической упаковки одинаковых сфер, предварительно нагруженных давлением $\bar{p}$, можно записать в виде

$$c_P = \left[\frac{3E_s^2\, \bar{p}}{8(1-\nu_s^2)^2}\right]^{1/6}\left(\frac{6}{\pi\rho_s}\right)^{1/2}. \quad (3.38)$$

Здесь E_s, ν_s и ρ_s — константы, характеризующие материал сфер.

Поперечные волны, распространяющиеся вдоль оси упаковки

Аналогично рассмотрим распространение поперечной волны вдоль одной из осей кубической упаковки. Предварительная нагрузка та же самая, но дополнительное напряжение $\bar{p}_{xy}$ обусловливается касательными силами, действующими на площадках, перпендикулярных к осям x и y. Для поперечной волны, распространяющейся вдоль оси y, среднее смещение выражается через смещение, параллельное оси x. Следовательно, средняя деформация $\bar{e}_{xy}$ совпадает с $\partial\bar{u}_x/\partial y$ [см. рис. 2.1, *в* и уравнения (2.1)]. Касательная сила $\Delta G'$, действующая на отдельный контакт зерен, имеет величину $4a^2\bar{p}_{xy}$, и, как показано на рис. 3.8, *а*, между центрами соприкасающихся сфер возникает дополнительное смещение $\Delta s'$. Деформация упругих тел в окрестности контакта, обусловленная приложением касательных сил, изучавшаяся Каттанео [33] и Миндлиным [104], заслуживает более подробного рассмотрения, чем то, которое приводится нами.

Один из результатов Миндлина и Каттанео состоит в том, что касательное напряжение на круговом контакте имеет круговую симметрию и зависит от радиуса так, как показано на рис. 3.8, *в*. Благодаря тому, что касательные напряжения особенно велики на краю кругового контакта (где нормальное напряжение, обусловленное предварительным нагружением равно нулю), должно воз-

никнуть явление соскальзывания. Главный результат, который необходим для дальнейшего анализа, аналогичен по смыслу соотношению (3.35) и характеризует связь силы и смещения. Эта связь [104] в наших обозначениях выражается следующим образом:

$$\frac{\Delta G'}{\Delta s'} = \frac{[6(1-\nu_s^2)\, aE_s^2 G]^{1/3}}{(2-\nu_s)(1+\nu_s)} = \frac{4\mu_s b}{2-\nu_s}. \tag{3.39}$$

Прежде чем вычислить соответствующий упругий модуль по этой формуле, необходимо остановиться на следующем. На рис. 3.8, *б* показана типичная сфера, на которую действуют горизонтальные силы $\Delta s'$ в противоположных направлениях со стороны ее

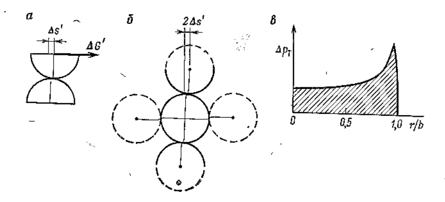


Рис. 3.8. Поведение кубической упаковки сфер при возрастающей касательной нагрузке.

выше- и нижележащих примыкающих сфер. Эти силы заставляют сферу вращаться до тех пор, пока не возникнет компенсирующий вращательный момент, обусловленный вертикальными силами на круговых контактах с соседними сферами по горизонтали. Каждая из четырех сил имеет величину $\Delta G'$ и вызывает относительное смещение $\Delta s'$ на каждом из контактов, согласно только что рассмотренному механизму. Кроме того, каждая сфера подвергается вращению по часовой стрелке на угол $\Delta s'/2a$. Чисто вертикальное смещение сферы по отношению к ее соседним сферам по горизонтали равно нулю, а ее чистое горизонтальное смещение по отношению к ее соседним по горизонтали равно $2\Delta s'$. Средняя деформация $\bar{e}_{xy} = 2\Delta s/2a = \Delta s'/a$. Подстановка среднего напряжения и средней деформации в формулу (3.39) дает упругий модуль, характеризующий поперечные колебания

$$\frac{\overline{p}_{xy}}{\overline{e}_{xy}} = \overline{C}_{44} \frac{[3(1-\nu_s^2) E_s^2 \overline{p}]^{1/3}}{2(2-\nu_s)(1+\nu_s)}. \tag{3.40}$$

Учитывая среднюю плотность согласно (3.37), получим скорость поперечной волны вдоль одной из осей простой кубической

упаковки одинаковых сфер, предварительно нагруженных давлением $\bar{p}$:

$$c_S = [3(1-\nu_s^2)E_s^2\bar{p}]^{1/6}\left[\frac{3}{(2-\nu_s)(1+\nu_s)\pi\rho_s}\right]^{1/2}. \qquad (3.41)$$

Когда нормальные напряжения приложены вдоль одной из осей, сферы деформируются только в непосредственных окрестностях круговых контактов. Поэтому нормальные напряжения не вызывают никаких смещений вдоль перпендикулярных осей, и константа $\bar{C}_{12}$ согласно соотношениям (2.75) равна нулю.

Плотные упаковки сфер

Простая кубическая упаковка была выбрана в связи с тем, что на ее примере легко было проиллюстрировать основные особенности моделей сферической упаковки, хотя подобная упаковка сфер не является достаточно реалистичной моделью неконсолидирован-

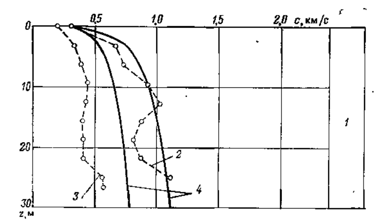


Рис. 3.9. Графики скоростей, измеренных экспериментально при межскважинном просвечивании в сыпучих песках (пунктир) и рассчитанных теоретически для сферической упаковки, нагруженной под собственным весом.

1 — рыхлый песок; 2 — горизонтальная компонента продольных волн; 3 — поперечные волны SV; 4 — расчетные кривые

ной зернистой среды. Следующий шаг к реалистичной модели состоит в том, чтобы рассмотреть более плотную упаковку. Гассман [59] вычислил скорости поперечных и продольных волн в материале с гексагональной плотной упаковкой одинаковых сфер, пренебрегая касательными силами, а Даффи и Миндлин [42] исследовали гранецентрическую кубическую упаковку, учитывая как нормальные, так и касательные силы. В обоих случаях наиболее сложной проблемой оказалось определение средних напряжений на гранях элементарного куба через компоненты сил, приложенных к точкам контактов в пределах данной структуры. Особый интерес представляли случаи, когда предварительное нагружение обуслов-

лено весом самой зернистой среды. В эту категорию попадают полностью неконсолидированные пески.

На рис. 3.9 проведено сравнение скоростей продольных и поперечных волн, измеренных в полевом эксперименте [187] и вычисленных с учетом упругих констант, полученных Даффи и Миндлиным [42], для волн, распространяющихся вдоль одной из осей гранецентрированной кубической упаковки. В этом случае $\bar{\rho} = (\pi/3\sqrt{2})\rho_s$, а предварительное давление было взято как $\bar{p} = \rho g z$. Для сфер, состоящих из кварца, имеем следующие значения констант: $\rho_s = 2{,}65$ см$^{-3}$, $\nu_s = 0{,}15$ и $E_s = 10^{12}$ дин/см^2. Сплошная линия, показывающая скорость продольных волн, вычислялась согласно формуле (3.46), в которой плотность флюида и модуль всестороннего сжатия полагались равными нулю. Если глубину z измерять в метрах, то $c_P = 650 Z^{1/6}$ м/с. Так как сдвиговая упругая константа (модуль сдвига) согласно Даффи равна половине константы, определявшей сжатие материала, то скорости поперечных волн определяли как $c_S = c_P/\sqrt{2}$ или 460 $Z^{1/6}$ м/с. Эта зависимость дает более высокие значения скорости, чем экспериментально измеренное значение скорости поперечной волны, тогда как простая кубическая упаковка, для которой $c_P = 530\, Z^{1/6}$ м/с и $c_S = 350\, Z^{1/6}$ м/с, значительно лучше соответствует экспериментальным данным, и тем не менее, с механической точки зрения, гранецентрированная упаковка должна рассматриваться как более реалистическая.

Насыщение флюидом

Регулярные упаковки сфер образуют анизотропный пористый скелет. Эффект флюидонасыщения анизотропного скелета изучался Гассманом [59]. Используя рассуждения, весьма сходные с теми, которые делались выше, выведем упругие константы для насыщенной флюидом простой кубической упаковки. Возвращаясь к рис. 3.6,*а*, рассмотрим поровые пространства между сферами, наполненные флюидом. Предварительное давление определяется как общая сила, действующая на некоторую грань и поделенная на ее площадь. Это давление состоит из давления p во флюиде и в твердых зернах и давления $\bar{p}$, которое получается усреднением сил, действующих для прижатия сферы друг к другу. Напряжения в продольной волне представляют малые отклонения от предварительного нагружения. Пусть p_{yy} и e_{yy} есть напряжение и деформация, действующие в волне, распространяющейся вдоль оси y; при этом $p_{yy} = C_{11} e_{yy}$, где C_{11} — упругая константа, которую необходимо найти. Если изменение сил, поддерживающих скелет, обозначить через напряжение $\bar{p}_{yy}$, а изменение давления флюида — через Δp_f, то $p_{yy} = -\Delta p_f + \bar{p}_{yy}$. Поскольку единственное смещение направлено вдоль оси y, относительное изменение объема двухкомпонентного материала совпадает с деформацией в направлении оси y: $\Delta V/V = e_{yy}$. Это изменение объема состоит из приращения объемов флюидной и твердой компонент: $\Delta V = \Delta V_f + \Delta V_s$. Прира-

щение объема флюида $\Delta V_f = -\Phi V \Delta p_f / k_f$. Изменение давления во флюиде рассматривается как гидростатическое, действующее через твердый материал и уменьшающее все линейные размеры на величину $V\bar{p}_{yy}/3k_s$. Действие $\bar{p}_{xx}$ на грани y также изменяет объем твердых сфер на величину $V\bar{p}_{yy}/3k_s$ [см. замечание, предшествующее формуле (3.27)]. Такое соотношение справедливо и для $\bar{p}_{xx}$ и $\bar{p}_{zz}$: уменьшение размеров сфер вызовет в противоположность сделанным предположениям деформацию в направлении осей x и z, пока напряжения в скелете $\bar{p}_{xx}$ и $\bar{p}_{zz}$ не станут равны $\bar{C}_{11}\Delta p_f/3k_s$. Оба эти напряжения совместно изменяют объем твердой компоненты на величину $2V\bar{C}_{11}\Delta p_f/9k_s^2$. Следовательно, общее изменение твердого материала

$$\Delta V_s = V\left[\frac{\bar{p}_{yy}}{3k_s} + \frac{2\bar{C}_{11}\Delta p_f}{9k_s^2} - (1-\Phi)\frac{\Delta p_f}{k_s}\right]. \qquad (3.42)$$

Другое уравнение связано с деформацией e_{yy}, поскольку напряжение $\bar{p}_{yy}$ действует на сферическую упаковку; возникающая деформация равна $\bar{p}_{yy}/\bar{C}_{11}$. Уменьшение линейных размеров, обусловленное давлением флюида, дает дополнительную деформацию. Следовательно,

$$e_{yy} = (\bar{p}_{yy}/\bar{C}_{11}) - (\Delta p_f/3k_s). \qquad (3.43)$$

В случае простой кубической упаковки напряжения $\bar{p}_{xx}$ и $\bar{p}_{zz}$ не влияют на e_{yy}. Пористость этой упаковки равна $\Phi = 1 - \pi/6$. Приведенные соотношения достаточны, чтобы получить выражение упругого модуля флюидонасыщенной сферической упаковки:

$$C_{11} = \bar{C}_{11} + \frac{(1-\bar{C}_{11}/3k_s)^2}{(1-\pi/6)/k_f + (\pi/6)/k_s - \bar{C}_{11}/3k_s^2}. \qquad (3.44)$$

Предполагая и далее, что флюид и твердое тело движутся вместе, имеем $\rho = (1-\pi/6)\rho_f + (\pi/6)\rho_s$. Следовательно, для простой кубической упаковки сфер, насыщенной флюидом, скорость продольных волн вдоль оси

$$c_p = \left\{\frac{\bar{C}_{11} + \left(1-\frac{\bar{C}_{11}}{3k_s}\right)^2 \Big/ \left[\frac{(1-\pi/6)}{k_f} + \frac{(\pi/6)}{k_s} - \frac{\bar{C}_{11}}{3k_s^2}\right]}{(1-\pi/6)\rho_s + (\pi/6)\rho_s}\right\}^{1/2}, \qquad (3.45)$$

где

$$\bar{C}_{11} = \left[\frac{3E_s^2\bar{p}}{8(1-\nu_s^2)^2}\right]^{1/3}.$$

Более плотная упаковка сфер, лучше отражающая естественную упаковку рыхлого песка, была рассмотрена Даффи и Миндлиным [42], которые учли и тангенциальные и нормальные силы в точках контакта. Они вывели упругие константы для гранецентрированной кубической упаковки идентичных сфер без флюида в поро-

вых пространствах. Упругие константы для скелета с учетом взаимодействий, обусловленных изменением объема, о которых только что говорилось в связи с простой кубической упаковкой, дают упругие константы для насыщенной среды. Пористость равна $(1-\pi/3\sqrt{2})$, откуда получаем плотность, равную $(1-\pi/3\sqrt{2})\rho_f + (\pi/3\sqrt{2})\rho_s$. Скорость продольных волн вдоль оси гранецентрированной кубической упаковки сфер, насыщенных флюидом:

$$\left.\begin{aligned} c_p &= \left\{ \frac{\overline{C}_{11} + \left(1 - \dfrac{\overline{C}_{11} + 2\overline{C}_{12}}{3k_s}\right)^2 \Big/ \left[\dfrac{(1-\pi/3\sqrt{2})}{k_f} + \dfrac{(\pi/3\sqrt{2})}{k_s} - \dfrac{\overline{C}_{11} + 2\overline{C}_{12}}{3k_s^2}\right]}{(1-\pi/3\sqrt{2})\rho_f + (\pi/3\sqrt{2})\rho_s} \right\}^{1/2} \\ \overline{C}_{11} &= \frac{4-3\nu_s}{2-\nu_s}\left[\frac{3E_s^2\bar{p}}{8(1-\nu_s^2)^2}\right]^{1/3}, \\ \overline{C}_{12} &= \frac{\nu_s}{2(2-\nu_s)}\left[\frac{3E_s^2\bar{p}}{8(1-\nu_s^2)^2}\right]^{1/8}. \end{aligned}\right\} \quad (3.46)$$

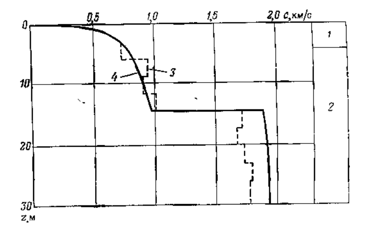


Рис. 3.10. Графики скоростей продольных волн для гранецентрированной кубической упаковки кварцевых шариков и наблюдаемых в сыпучих песках [187].
1 — глина; *2* — песок, *3* — результаты измерений; *4* — расчетные кривые

Важно выяснить, насколько хорошо эта модель соответствует измеренным скоростям по имеющимся литературным данным. Если давление флюида равно общему давлению на среду, то между сферами нет предварительного напряжения, и формула (3.46) описывает распространение в суспензии твердых частиц, взвешен-

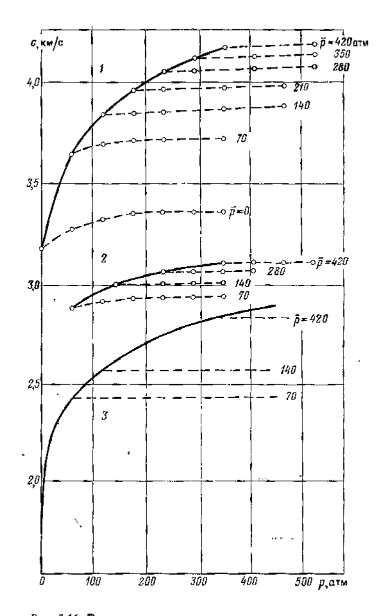


Рис. 3.11. Результаты измерения скорости продольных волн в двух образцах песчаника (по данным Хикса) и теоретические оценки скорости для гранецентрированной упаковки кварцевых зерен при различных комбинациях внешнего давления и давления во флюиде.

Пористость образцов: *А* — 18 %, *Б* — 29 %. *1* — образец *А*; *2* — образец *Б*; *3* — сферическая упаковка

ных во флюиде. Для этого условия скорость, рассчитанная по формуле (3.46), равна 1,78 км/с, и это значение соответствует выводам Нэйфа и Дрэйка [109] относительно скоростей продольных волн в морских осадках без перекрывающей толщи. Для кварца и воды использовались следующие константы: $\rho_f=1{,}0$ г/см$^{-3}$, $k_f=2\times10^{10}$ дин/см^2, $\rho_s=2{,}65$ г/см^3, $E_s=10^{12}$ дин/см$^{-2}$, $\nu_s=0{,}15$. Если поровое пространство пустое или заполнено воздухом, то значениями k_f и ρ_f можно пренебречь, и формула (3.46) дает скорость волн в сухой упаковке сфер.

На рис. 3.10 рассчитанные по формуле (8.46) скорости сравниваются с опубликованными значениями скоростей продольных волн, проходящих вертикально вдоль скважины в рыхлом песке [187]. На глубине до 15 м общее давление равно $(\pi/3\sqrt{2})\rho_s gZ$, что обусловлено весом материала, расположенного выше Z, а скорость варьирует как корень в шестой степени глубины. На глубине ниже 15 м наличие воды в порах вносит свой вклад в общее давление и соответствует увеличению флюидного давления; следовательно, уравнение (3.46) может быть использовано для всех глубин.

Из уравнений (3.46) можно видеть, что скорость одинакова для любого уровня общего внешнего давления p до тех пор, пока соответственно изменяется давление флюида p_f, чтобы поддержать постоянную разность давления $\bar{p}=p-p_f$. Хикс и Берри [68] показали, что керн песчаника характеризуется этим свойством. На рис. 3.11 показаны измеренные скорости на двух образцах керна с различной пористостью. Образец $Б$ имеет пористость (29 %), достаточно близкую к пористости гранецентрированной кубической упаковки (26 %), определенную простым сравнением с помощью уравнения (3.46). Из рис. 3.11 можно сделать вывод о том, что модель сферической упаковки хорошо отражает реальный песчаный материал, но различия между теоретическими и экспериментальными данными достаточно велики, поэтому требуется дальнейший анализ, в котором необходимо учесть несферичность зерен, вариацию их размеров и наличие цементирующего материала.

МОДЕЛИ ПОРОД С ПУСТОТАМИ ИЛИ ТРЕЩИНАМИ

Пористость в некоторых карбонатных породах обусловлена главным образом изолированными полостями или пустотами, заполненными водой либо другими флюидами. Некоторые части мантии земли рассматриваются как частично расплавленные с изолированными скоплениями расплавленных пород, содержащихся в твердой матрице. Математическое описание упругого твердого тела, содержащего сферические или эллипсоидальные полости, является подходящей моделью для таких сред. Установлено, что при землетрясениях и обвалах горных пород напряжения вначале создают

изолированные трещины по всему объему горных пород. Возможной моделью для такой ситуации является упругое твердое тело, содержащее полости круговой или эллиптической формы и почти нулевую мощность. В обширной литературе, посвященной этим вопросам, отмечаются два подхода: вывод средних упругих констант через решение о статической задаче с учетом плотности как простой средневзвешенной по объему; оценка средних упругих констант и плотности по рассеянию плоских волн на полостях, находящихся в однородной среде. Упрощенное изложение обоих подходов будет дано ниже. Некоторые горные породы на очень небольшой глубине в прошлом были так разрушены, что их можно вполне описать как скопление блоков в почти первоначальном положении, контактирующих вдоль трех семейств пересекающихся плоскостей. Попытка смоделировать эту ситуацию базируется на допущении, что контакт между соседними блоками имеется на малых участках, аппроксимируемых кругами различного радиуса, на которых согласно теории Герца наблюдается увеличение приложенных сил и смещений. Результирующая анизотропная усредненная среда будет кратко обсуждаться ниже.

РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Средние упругие константы выводятся путем вычислений упругой энергии, передаваемой в единичный объем среды через напряжения на поверхности при наличии и отсутствии полостей. Например, давление p, прилагаемое к твердой матрице без полостей, будет генерировать энергию на единицу объема $W_s = p^2/2k_s$. То же напряжение применительно к среде с полостями будет генерировать $\bar{W} = p^2/2\bar{k}$. Разницу между этими двумя энергиями, которую иногда называют «энергией трещин», обозначим через ΔW. Тогда основное отношение примет вид

$$p^2/2\bar{k} = p^2/2k_s + \Delta W. \qquad (3.47)$$

Если ΔW можно оценить для заданного распределения полостей, то из (3.47) можно найти средний объемный модуль. Эшелби [46] формально выразил изменение энергии, обусловленное полостями произвольной формы, и показал, как это выражение можно оценить для эллипсоидальных полостей, пустых и заполненных флюидом или твердым веществом. Эллипсоидальные полости имеют две полуоси, равные a и b $(a > b)$. Отношение b/a представляет коэффициент вытянутости, равный единице для сферических полостей и очень малый для трещин. Для особого случая сферических полостей, наполненных контрастирующим твердым веществом, с контрастными свойствами, выражение Эшелби для объемного модуля согласуется с тем, которое было выведено ранее

Бругеманом [28]. Формулы Эшелби для сферических полостей, наполненных флюидом, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} k &= k_s/(1+A\Phi) \approx k_s(1-A\Phi), \\ \mu &= \mu_s/(1+B\Phi) \approx \mu_s(1-B\Phi), \\ A &= \left(\frac{k_s-k_f}{k_s}\right)\left(\frac{4\mu_s+3k_s}{4\mu_s+3k_f}\right), \\ B &= \frac{15(1-\nu_s)}{(7-5\nu_s)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.48}$$

Эшелби отметил, что пористость Ф должна быть малой, поскольку полости расположены достаточно далеко друг от друга, чтобы можно было пренебречь их взаимодействием. Отсюда $(1+A\Phi)^{-1}$ можно записать как $(1-A\Phi)$, а $(1+B\Phi)^{-1}$ — как $(1-B\Phi)$. Чтобы сравнить с выражениями для пустых несферических полостей, положим $k_f=0$ и заметим, что $\Phi=(4\pi a^3/3L^3)$, где a — радиус сферической полости и L — размер элементарного объема, содержащего только одну полость. Тогда выражение Эшелби для объемного модуля имеет вид

$$\bar{k} = k_s\left[1+2\pi\frac{(1-\nu_s)}{(1-2\nu_s)}\frac{a^3}{L^3}\right]^{-1}. \tag{3.49}$$

Исходя из других соображений, Уолш [171] вывел выражение для низкой концентрации пустых сферических полостей, которое согласуется с (3.49). Он отметил, что если многофазная среда содержит полости разных размеров, то a^3 в формуле (3.49) может быть заменена на среднюю для куба заданного радиуса, т. е. на величину $\bar{a}^3=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a^3_n$. Уолш рассмотрел также влияние округлых трещин на объемный модуль, взяв из литературы оценку величины ΔW, фигурирующей в (3.47). Каждая трещина круглая и имеет нулевую толщину. Радиус трещины входит в формулу (3.49) в кубе, поэтому разброс размеров трещин приводит к появлению средней кубической величины a^3, определявшейся выше. Предполагается, что в среднем одна трещина приходится на один элементарный объем L^3. Для округлых пустых трещин Уолш получил следующую формулу:

$$\bar{k} = k_s \Big/ \left[1+\frac{16}{9}\frac{(1-\nu_s^2)}{(1-2\nu_s)}\frac{\bar{a}^3}{L^3}\right]. \tag{3.50}$$

По-видимому, необходимо отметить, что ориентация трещин не влияет на средний объемный модуль.

Попытку объяснить взаимодействие трещин сделали в своей работе Будянский и О'Коннел [130]. При оценке ΔW они вычисляли потерю энергии, создаваемую единственной изолированной трещиной в бесконечной среде, имеющей эффективные свойства трещиноватого тела. Они рассчитывали потерю энергии, обуслов-

ленную случайно ориентированным множеством плоских круговых трещин с разным радиусом. Средние упругие константы вычислялись по формулам:

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{k} &= k_s\left[1-\frac{16}{9}\,\frac{(1-\bar{\nu}^2)}{(1-2\bar{\nu})}\,\frac{\bar{a}^3}{L^3}\right],\\
\bar{\mu} &= \mu_s\left[1-\frac{32}{45}\,\frac{(1-\bar{\nu})\,(5-\bar{\nu})}{(2-\bar{\nu})}\,\frac{\bar{a}^3}{L^3}\right],\\
\frac{\bar{a}^3}{L^3} &= \frac{45}{16}\,\frac{(\nu_s-\bar{\nu})\,(2-\bar{\nu})}{(1-\bar{\nu}^2)\,(10\nu_s-\bar{\nu}-3\bar{\nu}\nu_s)}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.51)
$$

Поскольку распределение радиусов и числа трещин на единицу объема предполагается известным, то $\bar{a}^3/L^3$ тоже известно. Таким образом, последняя из формул (3.51) дает значение $\bar{\nu}$, которое может быть использовано в первых двух соотношениях.

Следует сделать несколько замечаний относительно применения приведенных выше выражений. Трещины должны быть отделены друг от друга достаточным интервалом, чтобы влияние соседних трещин на потерю энергии в данной трещине могло быть заменено на влияние однородной среды с модифицированными (эффективными) параметрами. Если потребовать, чтобы трещины были расположены друг от друга в среднем меньше, чем на диаметр одной трещины, то $\bar{a}^3/L^3$ не может быть больше, чем 1/64. Тогда из уравнений (3.51) следует, что $\bar{\nu}$ очень близко к ν. Например, если ν равно 0,25, то $\bar{\nu}$ равно 0,244. Тогда определяемое формулой (3.51) отношение $\bar{k}/k$ мало отличается от этого же отношения, полученного по формуле (3.50) (k/k_s=0,95). Были опубликованы результаты, где $\bar{a}^3/L^3$ достигало 9/16; в этом случае $\bar{k}$, $\bar{\mu}$ и $\bar{\nu}$ равны нулю, а диаметр средней трещины равен $1{,}65L$. Но уже при $\bar{a}^3/L^3 \ll 9/16$ трещины должны фактически врезаться одна в другую.

Динамически определяемые константы

Для оценки средних свойств среды, содержащей изолированные неоднородности, используется теория рассеяния плоских волн на таких препятствиях. Кастер и Токсоц [89] оценивали рассеяние на сфероидальном включении с ссылкой на более раннюю работу по рассеянию сферами и телами произвольной формы. На рис. 3.12 показано, как рассеяние от единственного сфероида можно использовать для определения средних свойств многокомпонентной среды. Распространяющаяся в однородной среде плоская волна падает на элементарный объем V_0 слева. В пределах небольшого сферического объема V_0 этой среды сфероидальные препятствия располагаются с густотой (концентрацией) и случайной ориентацией, характеризующими данную составную среду. Другими словами, сфера составного материала рассматривается как рассеиватель, для которого рассеиваемые волны зависят от средних конс-

тант среды (k, μ, ρ). Рассеиваемые колебания можно оценить как сумму смещений от индивидуальных сфероидов. Эти смещения зависят от специфических свойств среды: от констант твердой матрицы (k_s, μ_s, ρ_s), от параметров флюида во включениях (k_f, ρ_f), объемной концентрации рассеивателей, формы и ориентации сфероидов. Многократное рассеяние между сфероидами не принимается во внимание. Предположение о том, что рассеиваемое смещение является суммой индивидуальных смещений без фазового сдвига согласуется с предположением о том, что сфера V_0 является сама по себе небольшим рассеивателем. Эффективный объемный модуль k получается путем уравнивания рассеиваемых смещений, которые не зависят от угла рассеяния θ. Эффективная плотность ρ выводится из выражений, которые зависят от $\sin\theta$ или $\cos\theta$, а эффективный модуль сдвига μ — из выражений, пропорциональных $\sin 2\theta$ или $\cos 2\theta$.

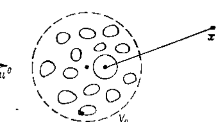


Рис. 3.12. Схема, иллюстрирующая рассеяние плоской волны (u^0) элементарной сферой V_0 (пунктирный круг) эффективной модели. Включения показаны сплошными линиями. Рассеянное поле оценивается в точке x [89]

Таким же образом Кастер и Токсоц [89] вывели средние константы для твердой матрицы, содержащей сфероидальные полости различных коэффициентов сжатия и ориентаций, заполненных твердым веществом или флюидом. Для сравнения со статически выведенными результатами, представленными формулой (3.48), ниже приводятся выражения для сферических полостей, заполненных флюидом:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{k-k_s}{3k+4\mu_s}=\frac{k_f-k_s}{3k_f+4\mu_s}\,\Phi,\\&\rho-\rho_s=(\rho_f-\rho_s)\Phi,\\&\frac{\mu-\mu_s}{6\mu(k_s+2\mu_s)+\mu_s(9k_s+8\mu_s)}=-\frac{\Phi}{(9k_s+8\mu_s)}\,.\end{aligned}\right\}\qquad(3.52)$$

Эти соотношения совершенно не похожи на результаты, выведенные статически. Даже плотность определена иначе, хотя после преобразований можно получить знакомое средневзвешенное по объему значение (3.23). Это говорит о том, что на низких частотах, к которым данная теория применима, твердая матрица и заключенный в ней флюид движутся с одинаковым смещением. Более того, при малых значениях пористости, для которых формулы (3.48) справедливы, выражения для k и μ неплохо согласуются с (3.52). Другими словами, динамически выведенные константы при

слабой концентрации сферических полостей, насыщенных флюидом, можно записать таким образом:

$$\left.\begin{aligned} k &= k_s(1 - A\Phi),\\ \rho &= \Phi\rho_f + (1-\Phi)\rho_s,\\ \mu &= \mu_s(1 - B\Phi),\\ A &= \left(\frac{k_s - k_f}{k_s}\right)\left(\frac{4\mu_s + 3k_s}{4\mu_s + 3k_f}\right),\\ B &= \frac{15(1-\nu_s)}{(7-5\nu_s)}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.53)$$

Понятно, что все три статические подходы различных авторов и динамический подход дают примерно один и те же константы для твердой матрицы, содержащей низкую концентрацию флюидонасыщенных сфер. При более высоких концентрациях они отличаются, поэтому в этом случае возникает вопрос относительно правомочности каждого выражения. Кастер и Токсоц [89] явно переоценили свое условие, касающееся невзаимодействия между рассеивателями, считая, что оно нарушается только при отношении объемной концентрации полостей к коэффициенту сжатия, большим единицы. Для сферических полостей с коэффициентом сжатия, равным единице, можно сделать вывод, что процессы взаимодействия нарушаются, когда пористость превышает 100 %. Упругие константы вычислялись Кастером и Токсоцом до значений пористости, достигающих 50 %; в этой точке диаметр сферы составляет 98 % от грани куба, которому она принадлежит. Полости почти смыкаются. Если принять, что смежные сферы не должны подходить ближе, чем на диаметр одной сферы, максимальная пористость, обеспечивающая невзаимодействие, была бы около 6 %.

ТРЕЩИНОВАТЫЕ ПОРОДЫ

Модель трещиноватой породы

В этой модели предполагается, что масса изотропной породы разбита на прямоугольные блоки, как показано на рис. 3.13. Элементарный куб, стороны которого меньше длины волны, содержит в то же время достаточное число блоков, чтобы характеризоваться средними свойствами, представленными для всей раздробленной породы. Так, средние расстояния между плоскостями разрыва определяются как L_x, L_y и L_z. Предполагается, что плоскости разрыва не регулярные и что касательное движение сместило бы соответствующие поверхности таким образом, чтобы контакт между смежными блоками имел место в локализованных точках там, где случайно встречаются выпуклости. Из-за трения эти точки выглядят так, как будто бы их спаяли. Когда элементарный куб подвергается напряжениям, нормальные и касательные силы в областях контакта вызывают локальные смещения, перпендикулярно к плос-

костям разрыва или параллельно им. Эти смещения вносят вклад в среднюю деформацию плюс к деформациям в пределах каждого прямоугольного блока. В среднем такая среда ортотропна с девятью упругими константами. Согласно формулам (2.80) различие скоростей продольных волн вдоль разных осей свидетельствует о наличии анизотропии; то же самое справедливо и в отношении скоростей поперечных волн с разным направлением движения частиц. Данная модель позволяет связать эти скорости со степенью разрушения породы и характером областей контактов. Соотношения Герца и Миндлина [формулы (3.35) и (3.39)] вновь исполь-

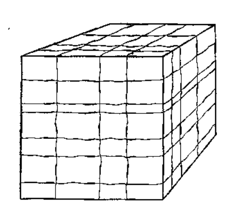


Рис. 3.13. Элементарный куб трещиноватой породы

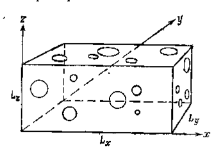


Рис. 3.14. Трещиноватый блок средних размеров

зуются для связи силы и смещения при жестком контакте с поверхностью упругого тела. Области контакта идеализируются в виде кружков; при этом предполагается, что в среднем число контактов одинаково на каждой грани элементарного блока, как это показано на рис. 3.14. Средние упругие константы для трещиноватой породы могут быть в этом случае рассчитаны, включая влияние флюида внутри трещин [183].

Параллельные плоскости разрыва

С целью иллюстрации нашего подхода, рассмотрим множество плоскостей разрыва, параллельных плоскости yz с интервалом L_x. Твердое тело описывается параметрами M, μ и ρ. Чтобы вывести упругую константу $\bar{C}_{44}$, определяющую скорость поперечных волн, проходящих вдоль оси x, нам понадобится соотношение между средним сдвиговым напряжением $\bar{p}_{xy}$ и средней деформацией $\bar{e}_{xy}$. Между плоскостями разрыва смещение линейно зависит от x:

$$e_{xy1} = \bar{p}_{xy}/\mu. \tag{3.54}$$

На каждой плоскости отмечается скачок смещения $\Delta s'$, который пропорционален напряжению $\bar{p}_{xy}$. Такая плоскость была названа «границей линейного скольжения» [139]. Выведенное Мин-

длиным соотношение дает силу $\Delta G'$, генерируемую контактным кругом с радиусом b в результате касательного смещения $\Delta s'$:

$$\Delta G'/\Delta s' = 4\mu b/(2-\nu). \quad (3.55)$$

Предположим, что область в плоскости разрыва с гранями, имеющими размеры ребер L_y и L_z, можно рассматривать как типичную с числом круговых контактов радиуса b_i, равным I. Тогда общая сила

$$\Sigma\Delta G' = \frac{4\mu\Delta s'}{(2-\nu)} \sum_{i=1}^{I} b_i. \quad (3.56)$$

Общий диаметр областей контакта определяется величиной $D_x = 2\Sigma b_i/I$, а число контактов на единицу площади $N_x = I/L_yL_z$. Отметим также, что $\bar{p}_{xy} = \Sigma\Delta G'/L_yL_z$ и $e_{xy2} = \Delta s'/L_x$. Тогда согласно уравнению (3.56)

$$e_{xy_2} = \frac{(2-\nu)}{2\mu N_x D_x L_x} \bar{p}_{xy}. \quad (3.57)$$

Средняя деформация определяется суммой двух составляющих:

$$\bar{e}_{xy} = e_{xy1} + e_{xy2} = \bar{p}_{xy}/\bar{C}_{66},$$
$$\bar{C}_{66} = \mu/[1 + (2-\nu)/2R_x], \quad (3.58)$$

где $R_x = N_x D_x L_x$.

Для продольной волны вдоль оси x скачок смещения на каждой плоскости разрыва определяется соотношением Герца:

$$\Delta G/\Delta s = 2\mu b/(1-\nu). \quad (3.59)$$

Совершенно аналогично получаем среднюю упругую константу для продольных волн:

$$\bar{C}_{11} = M/[1 + 2(1-\nu)^2/(1-2\nu)R_x]. \quad (3.60)$$

Блоковые разрывы

В случае, когда плоскости разрыва пересекаются, вывод оказывается более сложным. Выражения для C_{11}, C_{22} и C_{23} получаются очень громоздкими, особенно, если учитывается роль флюидона-

сыщения. Выражения для C_{44}, C_{55} и C_{66} относительно просты, и они не зависят от наличия флюида:

$$\begin{aligned}
\overline{C}_{44} &= \mu/[1 + (2-\nu)/2R_y + (2-\nu)/2R_z],\\
\overline{C}_{55} &= \mu/[1 + (2-\nu)/2R_z + (2-\nu)/2R_x],\\
\overline{C}_{66} &= \mu/[1 + (2-\nu)/2R_x + (2-\nu)/2R_y].
\end{aligned} \qquad (3.61)$$

Скорость поперечных волн как функция поляризации является возможным указателем анизотропии. Если взять ось z за вертикальную, то скорость поперечных волн вдоль скважины определя-

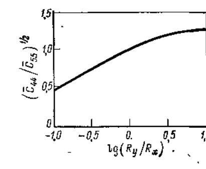


Рис. 3.15. График отношения скоростей поперечных волн для двух типов поляризации

лась бы константой $\overline{C}_{44}$ для одного направления движения частиц и константой $\overline{C}_{55}$ при движении в другом направлении. Соотношение этих двух скоростей показаны на рис. 3.15 для широкого диапазона соотношений параметров разрыва R_y и R_x.

Глава 4

ПОГЛОЩЕНИЕ И ЗАТУХАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

ВВЕДЕНИЕ

Главные особенности процесса распространения сейсмических волн, которые наблюдались экспериментально, можно было предсказать на основе идеально упругой модели Земли. Законы отражения, преломления объемных волн и дисперсия поверхностных волн могут быть выведены с помощью уравнений упругости для сред с границами, выбранными с учетом имеющихся представлений о разрезе Земли. Однако имеются отличия между наблюдениями и теоретическим предсказанием, главное из которых состоит в более сильном уменьшении амплитуды наблюденных волн, чем это вытекает из геометрического расхождения и отражений на границах. Это дополнительное уменьшение амплитуды мы будем называть поглощением. Цель этой главы — обзор экспериментальных данных о природе поглощения в горных породах и обсуждение некоторых теоретических моделей, предлагавшихся с целью генерализации экспериментальных данных и объяснения механизмов потери энергии. Ряд исследователей рассматривали эту проблему с почти одних и тех же позиций [21, 74, 100]. Недавнее собрание наиболее значительных трудов, снабженных прекрасными комментариями от редакторов [78], показывает современное состояние проблемы поглощения сейсмических волн. Поскольку эта публикация и прекрасный обзор, выполненный Мавко и Нуром [100], содержат достаточно полную библиографию, в нашем изложении мы постараемся коснуться только наиболее полезных концепций и соотношений без детальных ссылок на литературные источники.

Основой для обсуждения неупругого поведения вещества, наблюдающегося при разнообразных условиях, является распространение плоских волн в неограниченной поглощающей среде. При анализе этого явления появляется ряд связанных между собой величин, характеризующих потерю энергии, такие как сдвиг фазы между напряжением и деформацией, относительная потеря энергии на период, коэффициент поглощения и логарифмический декремент. Все эти величины могут называться параметрами поглощения. Для заданного параметра поглощения требуются две независимые величины, описывающие потери энергии в изотропной среде, почти так же, как две упругие константы, которые требовалось для описания идеально упругой изотропной среды. Два параметра поглощения, характеризующие распространение плоской волны, позволяют интерпретировать поведение волн в тонком стержне или в тонкослоистой среде с поглощением, а также в резонаторах простой структуры. Величины, полученные в различных

экспериментах, могут сравниваться между собой путем приведения их к эквивалентным параметрам поглощения для плоских волн. Рассмотрение плоских волн выявляет связь между поглощением и фазовой скоростью, которая выполняется, если поглощающая среда удовлетворяет принципу причинности. Это рассмотрение обеспечивает возможность вычисления средних упругих констант и параметров поглощения для среды, содержащей поглощающие линейные неоднородности, аналогично тому, как это делалось для однородных в среднем упругих сред.

Еще в 1890 г. лорд Кельвин провел ряд экспериментов по изучению крутильных колебаний стержней с целью изучения поглощения. Знакомясь с оборудованием, которое использовалось 40—50 лет назад, можно только удивляться тому, что измерение продольных, крутильных и изгибных резонансных явлений на цилиндрических образцах горных пород позволили сделать выводы, которые представляют интерес и в настоящее время, и поставить вопросы, которые до сих пор занимают исследователей. Современная техника изучения резонансов на стержнях обеспечивает контроль за флюидонасыщением и внешним давлением, позволяющий моделировать условия естественного залегания. В другом способе используется острота резонансной кривой простого осциллятора, в котором пружиной служит тонкий стержень пород, а массивная нагрузка обеспечивает низкую резонансную частоту. В сделанном с высокой точностью шарике горной породы может возбуждаться семейство резонансных мод, обеспечивая измерения параметров ее поглощения продольных и поперечных волн в широком диапазоне частот. Фактически тот же способ применяется и для изучения собственных колебаний Земли, возбуждаемых сильными землетрясениями.

Более прямой способ измерения параметров поглощения основан на регистрации формы волны в разных точках, расположенных по направлению распространения волны. Свойства пород в естественном залегании могут быть определены на основе изучения объемных волн от землетрясений и от взрывов. Частотная зависимость обычно оценивается с помощью Фурье-анализа сейсмограмм. Аналогичные измерения проводятся и на образцах, когда спектр импульсов лежит в ультразвуковом диапазоне частот. В случае малых образцов, используемых при моделировании условий естественного залегания, на различных расстояниях от датчика регистрируются волновые пакеты, состоящие из нескольких периодов синусоиды в мегагерцевом диапазоне. Амплитуда пакета служит индикатором поглощения на видимой частоте. Хотя большинство способов применяются в течение нескольких десятилетий, усовершенствование аппаратуры позволяет получить более точные результаты. Накопленный опыт дает возможность с большей точностью вносить коррекцию за геометрию расстановки и характеристики приемников и, что самое важное, построить аппаратуру, позволяющую приблизить флюидонасыщение, давление и температуру в образце к условиям естественного залегания осадочных отложений.

Стремление иметь хорошее физическое объяснение затухания сейсмических волн породило массу работ с гипотетическими механизмами поглощения. В 1848 г. Стокс предположил, что сжатие поглощающего материала является чисто упругим, в то время как сдвиг сопровождается вязкостью, схожей с вязкостью жидкости. Это предположение ведет к квадратичной зависимости коэффициента поглощения от частоты в низкочастотном диапазоне. Однако многие измерения указывали на линейную зависимость коэффициента поглощения от частоты. Многие исследователи связывали поглощение с сухим трением, которое, например, может сопровождать скольжение в области контактов между зернами, но при этом достигали весьма ограниченного успеха. Было предложено понятие внутреннего трения для характеристики свойства твердого тела, которое выражается в том, что диаграмма напряжение — деформация содержит гистерезис. Из этой модели следует линейная зависимость поглощения от частоты. Было показано, что движение дислокаций в несовершенных поликристаллических породах может вызывать внутреннее трение, согласующееся с экспериментом. Некоторые авторы показали, что измеряемое поглощение можно объяснить также термоупругостью и при соответствующем подборе неоднородности в среде добиться удовлетворительного согласования с экспериментальными данными о зависимости поглощения от частоты.

Роль флюидонасыщения в пористых породах изучалась с различных точек зрения. Большие относительные движения между флюидом и скелетом в полностью насыщенных породах обусловливает затухание волны на низких частотах, которое много меньше измеряемых величин. Изучение частично насыщенных пород выявляет такие геометрические характеристики скелета, при которых поток флюида вызывает более существенные потери энергии. В общем, различные модели поглощения включают ряд разумных с физической точки зрения параметров, значение которых почти невозможно оценить независимыми экспериментами. Поэтому не так просто было бы сделать выбор между предлагавшимися моделями, если бы это было необходимо. Фактически же нельзя ожидать, что один механизм может объяснить диссипацию энергии во всех породах при любых условиях их залегания.

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В МОДЕЛИ ФОЙГТА

Один из широко известных методов учета поглощения имеет то преимущество, что он дает линейное волновое уравнение, которое может быть решено для произвольной формы сигнала. Соответствующее предположение состоит в том, что напряжения прямо пропорциональны скорости изменения деформации как и компонентам самой деформации. Это предположение было предложено независимо Стоксом, Кельвином и Фойгтом, а следствия из него изучались многими исследованиями. Этот тип среды мы будем называть телом Фойгта, поскольку термин использовался различными авторами.

Связь деформаций и напряжений

Связь деформации и напряжения описывается модифицированным законом Гука, включающим скорость изменения деформации:

$$
\begin{aligned}
p_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\, e_{xx} + \lambda e_{yy} + \lambda e_{zz} + (\lambda' + 2\mu') \times \\
&\quad \times \frac{\partial e_{xx}}{\partial t} + \lambda' \frac{\partial e_{yy}}{\partial t} + \lambda' \frac{\partial e_{zz}}{\partial t} \\
p_{yy} &= \lambda e_{xx} + (\lambda + 2\mu)\, e_{yy} + \lambda e_{zz} + \\
&\quad + \lambda' \frac{\partial e_{xx}}{\partial t} + (\lambda' + 2\mu) \frac{\partial e_{yy}}{\partial t} + \lambda' \frac{\partial e_{zz}}{\partial t}, \\
p_{zz} &= \lambda e_{xx} + \lambda e_{yy} + (\lambda + 2\mu)\, e_{zz} + \\
&\quad + \lambda' \frac{\partial e_{xx}}{\partial t} + \lambda' \frac{\partial e_{yy}}{\partial t} + (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial e_{zz}}{\partial t}, \\
p_{xy} &= \mu e_{xy} + \mu' \frac{\partial e_{yy}}{\partial t}, \\
p_{yz} &= \mu e_{yz} + \mu' \frac{\partial e_{yz}}{\partial t}, \\
p_{zx} &= \mu e_{zx} + \mu' \frac{\partial e_{zx}}{\partial t},
\end{aligned}
\qquad (4.1)
$$

Эта система уравнений соответствует системе уравнений (2.2) для идеально упругой среды. Формулы (2.1), связывающие деформации с перемещениями, остаются в силе, так же как и уравнения равновесия (2.3). Следовательно, мы легко можем выписать соответствующее уравнение движения, отличающееся от (2.4) слагаемым, зависящим от скорости деформации.

Скорости и поглощение

Поведение плоской продольной волны можно получить при помощи соответствующего аналога уравнения (2.5), в котором u_x представляет единственную компоненту смещения и в котором движение не зависит от координат y и z:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial^3 u_x}{\partial t\, \partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \qquad (4.2)$$

Поскольку величина $\lambda + 2\mu$ представляет собой модуль плоского сжатия и обозначается символом M, аналогичную величину $\lambda' + 2\mu'$ можно обозначить M'.

Если уравнение (4.2) решать методом разделения переменных, временная зависимость оказывается экспоненциальной. Мы ее возьмем в виде $e^{j\omega t}$. Обозначим зависящую от пространственной координаты функцию $U_x(x, \omega)$. При каждом значении круговой частоты ω она должна удовлетворять следующему уравнению:

$$(M + i\omega M')\,(d^2U/dx^2) = -\rho\omega^2 U. \qquad (4.3)$$

Зависимость от x также оказывается экспоненциальной:

$$U(x, \omega) = U_0 e^{\pm Gx}, \tag{4.4}$$

где согласно (4.3)

$$G = [-\rho\omega^2/(M + i\omega M')]^{1/2}. \tag{4.5}$$

Эта комплексная величина может быть выражена через коэффициент поглощения a_P и фазовую скорость c_P:

$$G = a_P + i\omega/c_P. \tag{4.6}$$

Согласно Риккеру [127] обозначим $\omega_0 = M/M'$. Тогда

$$a_P = \frac{\omega_0 \left(\omega^2/\omega_0^2\right)}{\left[2\,(M/\rho)\left(1 + \omega^2/\omega_0^2\right)\left(\sqrt{1 + \omega^2/\omega_0^2} + 1\right)\right]^{1/2}},$$
$$c_P = \left[\frac{2\,(M/\rho)\left(1 + \omega^2/\omega_0^2\right)}{\sqrt{1 + \omega^2/\omega_0^2} + 1}\right]. \tag{4.7}$$

Эти величины нанесены на рис. 4.1 для значений $(M/\rho)^{1/2} = 2$ км/с и $\omega_0 = 16\,000\,\pi\ \text{с}^{-1}$, характеризующих глинистые сланцы формации Пиерру [127]. Поскольку имеются обоснованные возражения против выводов Риккера, отличающиеся от указанных измерений свойств пиеррских сланцев, приведенные графики характеризуют не более чем гипотетическое тело Фойгта.

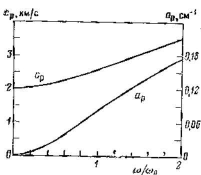


Рис 4.1. Коэффициент поглощения и скорость продольной волны в теле Фойгта в зависимости от частот

Во многих случаях сейсмические сигналы состоят из низкочастотных компонент, для которых условие $\omega^2 \ll \omega^2_0$ можно считать выполненным. В таких случаях поглощение растет как квадрат частоты, а скорость приблизительно постоянна:

$$a_P = [\omega_0/2\,(M/\rho)^{1/2}]\,(\omega^2/\omega^2_0),$$
$$c_P = (M/\rho)^{1/2}. \tag{4.8}$$

Хотя данная аппроксимация во многих ситуациях может рассматриваться как адекватная, она имеет одну неприятную особенность, а именно нарушение принципа причинности. Условие причинности и адекватность низкочастотной аппроксимации обсуждаются ниже.

Условие причинности

Причинная функция[1] времени определяется как функция, равная нулю до какого-то фиксированного момента времени, который может быть взят равным нулю. В физически реализуемой среде отклик, обусловленный действием причинного источника, должен быть также причинным, т. е., выходной сигнал должен быть равен нулю до того, как начнет действовать источник. Будем считать, что начальное смещение является импульсом вида $u(0, t) = U\Delta\tau\delta(t)$, Фурье-преобразование которого совпадает с константой $U\Delta\tau$. Этот источник является причинным. Выходной сигнал, совпадающий с импульсной характеристикой среды, представляет смещение на произвольном расстоянии:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U\Delta\tau e^{-(a_P + i\omega/c_P)x} e^{i\omega t} d\omega. \tag{4.9}$$

Если a_P и c_P из (4.8) подставить в (4.9), то

$$u(x, t) = (U\Delta\tau) \left(\frac{c_P \omega_0}{2\pi x}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{-c_P \omega_0 (t - x/c_P)^2}{2x}\right]. \tag{4.10}$$

Эта колокольного вида кривая имеет ненулевые значения при $t<0$ и, следовательно, не является причинной. Поскольку тело Фойгта представляет физически реализуемую среду, подстановка точных значений поглощения и фазовой скорости, выражаемых формулой (4.7), в (4.9) должна дать причинную импульсную характеристику.

Оба варианта импульсных характеристик приведены на рис. 4.2. При расчетах использовались те же параметры, что и на рис. 4.1, расстояние взято $x = 100$ м. Обе кривые идентичны. Отсюда следует вывод, что после распространения волны на расстояние сотен метров высокочастотные компоненты настолько сильно затухли, что скорость оставшихся компонент постоянна. Для сравнения на рис. 4.3 показаны соответствующие импульсные характеристики для $x = 10$ см. Эффект дисперсии очевиден, импульс не является причинным, так как начинается при $t<0$. Как мы увидим ниже, скорость переноса энергии равна фазовой скорости, которая неограниченно возрастает как квадратный корень из частоты. Следовательно, мы должны были бы ожидать, что выходной сигнал должен начаться при $t = 0$ независимо от расстояния. Ширина любого из импульсов составляет десятые доли миллисекунд, поэтому свертка обычного отраженного сейсмического сигнала с любой из импульсных характеристик даст практически один и тот же результат.

---

[1] В отечественной литературе используются также термины полуфинитная, правосторонняя и козуальная функции. Автор широко использует выражения «причинная среда», «причинное поведение» и т. п., которые надо понимать как сокращения таких выражений: среда, удовлетворяющая принципу причинности, или физически реализуемая среда и т. д. (Прим. ред.).

Для причинной функции времени, реальная и мнимая части их преобразования Фурье связаны парой преобразований Гильберта [115]:

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{I(y)}{\omega - y} dy,$$
$$I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{\omega - y} dy. \quad (4.11)$$

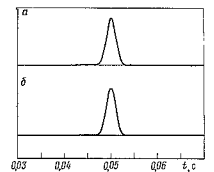


Рис. 4.2. Точная импульсная характеристика тела Фойгта (*а*) при использовании низкочастотной аппроксимации (*б*)

Рис. 4.2. Импульсные характеристики, полученные по точной формуле (*а*) и с использованием низкочастотной аппроксимации (*б*)

а
б
−0,1 0 0,1 0,2 t, мс

Эти соотношения справедливы и для смещений, выраженных формулой (4.9), где

$$R(\omega) = e^{-a_P x} \cos(\omega x / c_P),$$
$$I(\omega) = e^{-a_P x} \sin(\omega x / c_P). \quad (4.12)$$

Отсюда ясно, что параметры a_P и c_P связаны между собой. В частности, c_P должна зависеть от частоты, если a_P не равно нулю, т. е. поглощающая среда обязана быть диспергирующей.

Плотность энергии и интенсивность

Рассмотрение плотности энергии и интенсивности для плоской продольной волны в упругой среде при выводе формулы (2.10) применимо и к плоской продольной волне в теле Фойгта. Начнем с синусоидальной плоской волны:

$$u_x = U e^{-a_P x} \sin \omega\tau, \quad (4.13)$$

где $\tau = t - x/c_P$.

Все нужные нам свойства этой волны являются вещественными функциями времени, полученные при взятии соответствующих частных производных:

$$
\left.\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -U e^{-a_P x}\,[a_P \sin\omega\tau + (\omega/c_P)\cos\omega\tau], \\
v_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} = U\omega\, e^{-a_P x}\cos\omega\tau, \\
\frac{\partial e_{xx}}{\partial t} &= U\omega\, e^{-a_P x}\,[-a_P\cos\omega\tau + (\omega/c_P)\sin\omega\tau], \\
p_{xx} &= M e_{xx} + M'\frac{\partial e_{xx}}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.14)
$$

Кинетическая энергия на единицу объема равна $\rho v^2_x/2$. Учитывая, что плотность потенциальной энергии определяется только упругой частью напряжения p_{xx}, мы получим тот же самый результат, что и для упругой среды, а именно $Me^2_{xx}/2$. Для рассматриваемой поглощающей среды кинетическая и потенциальная энергии не равны друг другу, тогда как в упругой среде они совпадали. Однако, если усреднить общую плотность энергии на протяжении одного периода, мы получим, как будет видно ниже, один полезный результат. Усредненные по времени энергетические характеристики даются следующими выражениями:

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{KE} &= U^2\rho\omega^2 e^{-2a_P x}/4, \\
\overline{PE} &= U^2\rho\omega^2 e^{-2a_P x}(1-q^2)/4\,(1+q^2), \\
\overline{E} &= U^2\rho\omega^2 e^{-2a_P x}/2\,(1+q^2),
\end{aligned}\right\} \qquad (4.15)
$$

где $q = a_P c_P/\omega$.

Интенсивность в точке не пропорциональна плотности энергии в каждый момент, как это свойственно упругой среде, но усредненная по времени интенсивность пропорциональна усредненной по времени плотности энергии. Интенсивность определяется формулой

$$I_x = -p_{xx}/v_x. \qquad (4.16)$$

Это произведение содержит члены, средние значения которых равны нулю. После упрощения оставшихся членов получим неожиданный результат — средняя интенсивность равна средней плотности энергии, умноженной на c_P. Это означает, что скорость передачи энергии V_P равна фазовой скорости c_P для любой частоты

$$V_P = I_x/\overline{E} = c_P. \qquad (4.17)$$

В упругой среде скорости передачи энергии V_P и групповая скорость для волн любого типа совпадают [49]. Для поглощающей среды понятие групповой скорости неприменимо, но скорость переноса энергии по-прежнему определена и является весьма полезным параметром.

Нелинейные диаграммы напряжение — деформация, характеризующие некоторые модели, обладают одной общей особенностью — потеря энергии в течение одного цикла напряжения не зависит от скорости нагружения. Если доля теряемой энергии мала, то синусоидально изменяющаяся деформация приблизительно соответствует синусоидальному напряжению с небольшим фазовым углом между ними, который не зависит от частоты. Если в одно и то же время действуют две гармоники, они будут взаимодействовать друг с другом благодаря нелинейности. Поскольку фазовый угол предполагается малым, этим взаимодействием можно пренебречь и тогда отклик на сумму одновременно действующих гармоник будет рассматриваться равным сумме индивидуальных откликов. Это предположение численно исследовалось для одной нелинейной диаграммы напряжение — деформация [181] и подтвердилось. Как будет показано ниже, многие измерения на породах также подтверждают это предположение. Для обозначения сред с указанными свойствами вводится термин «почти упругие среды».

Связь деформации с напряжением

Аналог уравнения (4.1) может быть написан для любой нелинейной диаграммы напряжение — деформация, но вытекающее из него уравнение движения даже для плоской волны, аналогичное уравнению (4.2), в явном виде не решается. Единственная возможность состоит в том, чтобы записать соотношение между деформацией и напряжением для синусоидально изменяющейся нагрузки. Эта возможность основывается на том, что если все приложенные силы в среде осциллируют с фиксированной частотой, то любая особенность движения в каждой точке должна осцилировать точно с такой же частотой. Если это так, то синусоидально изменяющаяся деформация должна быть пропорциональна синусоидально изменяющемуся напряжению с комплексным множителем пропорциональности. Прежде чем записать соответствующий эквивалент уравнения (4.1) и рассмотреть возможность его применения, примем следующее обозначение:

$$p_{xx} = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} P_{xx} e^{i\omega t}\, d\omega,$$

$$e_{xx} = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} E_{xx} e^{i\omega t}\, d\omega \quad \text{и т. д.}$$

Большими буквами обозначены амплитуды, как правило, являющиеся комплексными величинами, зависящими от пространственных координат и частоты. Круговая частота может принимать любое значение — положительное или отрицательное. Комплексная амплитуда на любой отрицательной частоте комплексно сопряжена

с амплитудой на равной положительной частоте, если сама деформация (соответственно напряжение, смещение и т. д.) является вещественной функцией времени (см. гл. 1). Поэтому даже комплексные упругие константы, вещественные и мнимые части которых не зависят от частоты, должны изменять знак мнимой части при переходе от $+\infty$ к $-\infty$. Две упругие константы для изотропной упругой среды заменяются комплексными константами $(\lambda+i\lambda^* \operatorname{sgn}\omega)$ и $(\mu+i\mu^* \operatorname{sgn}\omega)$, где λ^* и μ^* — вещественные, положительные числа. Дальнейшее требование состоит в том, что $\lambda^* \ll \lambda$ и $\mu^* \ll \mu$. Связь между амплитудами для изотропной почти упругой среды определяется следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
P_{xx} &= [(\lambda+2\mu)+i(\lambda^*+2\mu^*)\operatorname{sgn}\omega]E_{xx}+ \\
&\quad+(\lambda+i\lambda^*\operatorname{sgn}\omega)E_{yy}+(\lambda+i\lambda^*\operatorname{sgn}\omega)E_{zz}, \\
P_{yy} &= (\lambda+i\lambda^*\operatorname{sgn}\omega)E_{xx}+[(\lambda+2\mu)+ \\
&\quad+i(\lambda^*+2\mu^*)\operatorname{sgn}\omega]E_{yy}+(\lambda+i\lambda^*\operatorname{sgn}\omega)E_{zz}, \\
P_{zz} &= (\lambda+i\lambda^*\operatorname{sgn}\omega)E_{xx}+(\lambda+i\lambda^*\operatorname{sgn}\omega)E_{yy}+ \\
&\quad+[\lambda+2\mu)+i(\lambda^*+2\mu^*)\operatorname{sgn}\omega]E_{zz}, \\
P_{xy} &= (\mu+i\mu^*\operatorname{sgn}\omega)E_{xy}, \\
P_{yz} &= (\mu+i\mu^*\operatorname{sgn}\omega)E_{yz}, \\
P_{zx} &= (\mu+i\mu^*\operatorname{sgn}\omega)E_{zx}.
\end{aligned}\right\} \quad (4.18)$$

Фазовый угол и относительная потеря энергии

Физический смысл сделанных выше предположений можно уточнить, рассмотрев более подробно ряд частных ситуаций. Если элементарный куб подвергается простому растяжению, показанному на рис. 2.1, то система уравнений (4.18) сводится к следующему уравнению:

$$P_{xx}=[(\lambda+2\mu)+i(\lambda^*+2\mu^*)]E_{xx}=(M+iM^*\operatorname{sgn}\omega)E_{xx}. \quad (4.19)$$

Используем символ $M=\lambda+2\mu$ для обозначения упругой константы, контролирующей скорость распространения плоской продольной волны [59]. Сделанное выше определение величины M^* представляет естественное обобщение на случай сред с поглощением. Согласно термину о почти упругих средах ($M^* \ll M$), можно положить $\operatorname{arctg}(M^*/M)=M^*/M$ и $(1+iM^*/M)^{-1}=1-iM^*/M=$ $=e^{-iM^*/M}$. Тогда из формулы (4.19) следует, что $E_{xx}=P_{xx}M(1+$ $+i\operatorname{sgn}\omega M^*/M)=P_{xx}/M)e^{-i\operatorname{sgn}\omega M^*/M}$. Положив $M^*/M=\theta_P$, связь деформации с напряжением в рассматриваемом случае запишем следующим образом:

$$P_{xx}e^{i\omega t}=ME_{xx}e^{i(\omega t+\theta_P\operatorname{sgn}\omega)}. \quad (4.20)$$

Иначе говоря, почти упругая среда характеризуется тем, что когда напряжение прикладывается к элементарному объему, результирующая деформация имеет амплитуду, равную веществен-

ной части упругой константы, и фазовый угол, равный отношению мнимой и вещественной частей. Если положить $\mu^*/\mu=\theta_S$, то совершенно аналогичное утверждение можно сделать в отношении деформации сдвига:

$$P_{xy}\,e^{i\omega t} = \mu E_{xy}\,e^{i(\omega t+\theta_S\,\mathrm{sgn}\,\omega)}. \tag{4.21}$$

Наличие фазового угла означает, что диаграмма деформация — напряжение имеет вид эллипса (рис. 4.4), где θ взято равным 0,1 рад. Площадь эллипса пропорциональна энергии, теряемой за один период. Отношение этой энергии к максимальной энергии, запасенной в течение этого же периода, используется как параметр, характеризующий поглощающие свойства среды. Связь этого параметра с фазовым углом будет дана для случая простого растяжения, описываемого уравнением (4.19). Скорость «подкачки» энергии к элементарному кубу за единицу объема равна произведению напряжения и скорости деформации. Если в уравнение (4.19) взять E_{xx} в виде $E_0\pi\,[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$, то деформация совпадает с вещественной функцией $E_0\cos\omega_0 t$ и скорость деформации окажется равной $-\omega_0 E_0\sin\omega_0 t$. При этих предположениях напряжение равно $ME_0\cos(\omega_0 t+\theta)$. Работа, совершаемая в течение одного периода от t_0 до $(t_0+2\pi/\omega_0)$, определяется следующим образом:

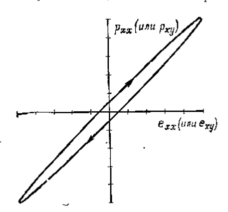


Рис. 4.4. Диаграмма напряжение — деформация для материала, характеризующимся значением θ_P (или θ_S) равным 0,1 рад

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} [ME_0\cos(\omega_0 t+\theta_P)]\,[-E_0\omega_0\sin\omega_0 t]\,dt =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} (ME_0^2)\,\omega_0\cos(\omega_0 t+\theta_P)\sin\omega_0 t\,dt \approx$$

$$\approx ME_0^2\left[\frac{\cos^2\omega_0 t}{2} + \theta_P\left(\frac{\omega_0 t}{2} - \frac{\sin 2\omega_0 t}{4}\right)\right]\Bigg|_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} \approx \pi\theta_P ME_0^2.$$

Максимальная энергия, запасенная в течение периода, равна $W=ME_0^2/2$. Отсюда находим параметр поглощения:

$$\left(\frac{\Delta W}{W}\right)_P = 2\pi\theta_P. \tag{4.22}$$

Рассмотрение сдвиговой деформации, согласно уравнению (4.21), привело бы к аналогичному выражению.

Волны в массиве

Рассмотрим распространение плоских продольных и поперечных волн в почти упругих средах, опуская соответствующий аналог уравнения движения (2.4). Аналог уравнения (2.5) запишется так

$$(M + iM^* \operatorname{sgn} \omega) \frac{d^2 U_x}{dx^2} = -\rho \omega^2 U_x. \quad (4.23)$$

Предположив $U_x = U_0 e^{Gx}$, получим

$$G = \left[i\omega \left(\frac{\rho}{M}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{i\theta_P \operatorname{sgn} \omega}{2}\right)\right] = \left(\frac{i\omega}{c_P} + \frac{|\omega| \theta_P}{2c_P}\right),$$

поскольку $\operatorname{sgn} \omega = \omega/|\omega| = |\omega|/\omega$.

Для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x, напишем выражение

$$U_x = U(0, \omega) e^{-a_P x} e^{-i\omega x/c_P}, \quad (4.24)$$

где

$$a_P = |\omega| \theta_P / 2c_P, \quad c_P = (M/\rho)^{1/2}.$$

Следует заметить, что фазовая скорость определяется вещественной частью упругой константы и плотностью, амплитуда колебаний экспоненциально уменьшается с расстоянием $e^{a_P x}$, где коэффициент поглощения a_P равен $|\omega| \theta_P / 2c_P$. Фазовый угол и фазовая скорость не зависят от частоты, а коэффициент поглощения с ростом частоты возрастает линейно.

В случае плоской поперечной волны уравнение (2.8) эквивалентно уравнению

$$(\mu + i\mu^* \operatorname{sgn} \omega) \frac{d^2 U_y}{dx^2} = -\rho \omega^2 U_y. \quad (4.25)$$

Следующее решение описывает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x:

$$\left.\begin{aligned} U_y &= U(0, \omega) e^{-a_S x} e^{-i\omega x/c_S}, \\ a_S &= |\omega| \theta_S / 2c_S, \\ c_S &= (\mu/\rho)^{1/2}. \end{aligned}\right\} \quad (4.26)$$

Из уравнения (4.24) видно, что почти упругая среда нарушает принцип причинности, поскольку, как отмечалось ранее, в причинной среде наличие поглощения обусловливает дисперсию скорости.

Положим в уравнении (4.24) $U(0, \omega)$ равным независящей от частоты величине $U \Delta \tau$, что означает смещение в виде δ-функции при $x = 0$ и $t = 0$. Тогда обратное преобразование Фурье U_x

$$u_x(x, t) = \frac{1}{\pi} \frac{(U_0 \Delta\tau)(\theta_P x/2c_P)}{(t - x/c_P)^2 + (\theta_P x/2c_P)^2}. \quad (4.27)$$

На любом расстоянии x импульсная характеристика имеет конечное значение при всех t. Свертывая (4.27) с любым импульсным воздействием при $x = 0$, получим смещение, которое начина-

ется до того, как начал действовать источник. Это непричинное поведение аналогично аппроксимации телу Фойгта согласно выражению (4.10). Возможность существования причинной среды, в которой поглощение линейно зависит от частоты, а скорость незначительно зависима от нее, обсуждается в следующем разделе.

Соотношение между характеристиками поглощения

Мы установили, что потери энергии в среде выражаются при помощи трех параметров: фазового угла между напряжением и деформацией, потерей энергии за один цикл напряжения, и экспоненциальным затуханием амплитуды с расстоянием. Необходимо еще упомянуть декремент поглощения δ. Если U_0 есть амплитуда при $x=0$ и U_Λ — амплитуда на расстоянии одной длины волны, $x=\Lambda$, то

$$\delta_S = -\ln\frac{U_\Lambda}{U_0} = \ln e^{i(|\omega|\theta_S/2c_S)\Lambda} = \pi\theta_S. \qquad (4.28)$$

Видно, если фазовый угол для элементарного объема не зависит от частоты, то и относительное уменьшение энергии на расстоянии длины волны также не зависит от частоты. Приведенные факты применимы также и к продольным волнам.

Пятый параметр поглощения, часто называемый добротностью, характеризует относительную ширину резонанса некоторой моды колебания (см. рис. 4.16). Если некоторое воздействие обусловливает максимальный выходной сигнал на частоте f_n и если увеличение или уменьшение частоты на величину Δf вызывает уменьшение амплитуды в $\sqrt{2}$ раза, то добротность Q для данного максимума определяется как

$$Q=f_n/2\Delta f. \qquad (4.29)$$

Если бы резонирующее тело представляло тонкую кристаллическую пластинку, вибрирующую на некоторой моде, соответствующей ее толщине, то волновое поле состояло бы из очень высокочастотной плоской волны и соответствующая добротность характеризовала бы значение Q_P. Добротность для крутильного резонанса обозначается как Q_S. На добротность Q резонансной моды сложного тела, например колокола, оказывает влияние как значение Q_P, так и Q_S соответствующего материала.

Каждый из перечисленных выше параметров поглощения может быть выражен через остальные. Например, для продольных волн имеем следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&a_P = |\omega|\theta_P/2c_P = |\omega|/2c_P Q_P = |\omega|\delta_P/2\pi c_P = |\omega|(\Delta W/W)_P/4\pi c_P,\\
&\theta_P = 2a_P c_P/|\omega| = 1/Q_P = \delta_P/\pi = (\Delta W/W)_P/2\pi,\\
&Q_P = |\omega|/2a_P c_P = 1/\theta_P = \pi/\delta_P = 2\pi/(\Delta W/W)_P,\\
&\delta_P = 2\pi a_P c_P/\omega = \pi\theta_P = \pi/Q_P = (\Delta W/W)_P/2,\\
&\left(\frac{\Delta W}{W}\right)_P = 4\pi a_P c_P/|\omega| = 2\pi\theta_P = 2\delta_P.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.30)$$

Заменяя нижний символ P на S, получим соответствующие соотношения для поперечных волн. Символ Y будет относиться к модулю Юнга, характеризующему распространение волн вдоль тонкого стержня.

Волны в стержнях и пластинах

Поскольку большое число измерений поглощения в породах были проведены на тонких стержнях, представляет интерес рассмотреть, как параметры поглощения в тонком стержне связаны с характеристиками поглощения в массиве. Это можно сделать, основываясь на уравнениях (4.18). По предположению поперечный размер стержня мал, поэтому короткий участок стержня может рассматриваться как элементарный объем для продольных волн вдоль стержня, сдвиговые напряжения и нормальные напряжения, перпендикулярные к оси, пренебрежимо малы по сравнению с нормальными напряжениями, действующими вдоль оси. Следовательно, уравнения (4.18) сводятся к следующим:

$$\left.\begin{aligned} P_{xx}&=[(\lambda+2\mu)+i\,\mathrm{sgn}\,\omega\,(\lambda^*+2\mu^*)]\,E_{xx}+(\lambda+i\,\mathrm{sgn}\,\omega\lambda^*)\,E_{yy}+\\ &\qquad+(\lambda+i\,\mathrm{sgn}\,\omega\lambda^*)\,E_{zz},\\ &(\lambda+i\,\mathrm{sgn}\,\omega\lambda^*)\,E_{xx}+[(\lambda+2\mu)+i\,\mathrm{sgn}\,\omega\,(\lambda^*+2\mu^*)]\,E_{yy}+\\ &\qquad+(\lambda+i\,\mathrm{sgn}\,\omega\lambda^*)\,E_{zz}=0,\\ &(\lambda+i\,\mathrm{sgn}\,\omega\lambda^*)\,E_{xx}+(\lambda+i\,\mathrm{sgn}\,\omega\lambda^*)\,E_{yy}+[(\lambda+2\mu)+\\ &\qquad+i\,\mathrm{sgn}\,\omega\,(\lambda^*+2\mu^*)]\,E_{zz}=0.\end{aligned}\right\} \quad (4.31)$$

Исключая E_{yy} и E_{zz}, получим связь между нормальными напряжениями и деформацией удлинения для тонкого стержня:

$$\left.\begin{aligned} P_{xx}&=\frac{(\mu+i\mu^*\,\mathrm{sgn}\,\omega)\,[3\,(\lambda+i\lambda^*\,\mathrm{sgn}\,\omega)+2\,(\mu+i\mu^*\,\mathrm{sgn}\,\omega)]}{(\lambda+i\lambda^*\,\mathrm{sgn}\,\omega)+(\mu+i\mu^*\,\mathrm{sgn}\,\omega)}\,E_{xx}=\\ &=(E+iE^*\,\mathrm{sgn}\,\omega)\,E_{xx},\\ E&=\frac{\mu\,(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu},\\ E^*&=\frac{\mu^2\,\lambda^*+(3\lambda^2+4\lambda\mu+2\mu^2)\,\mu^*}{\lambda+\mu}.\end{aligned}\right\} \quad (4.32)$$

Вторая из формул (4.32) определяет выражение для модуля Юнга через параметры Ламе. Все комментарии, сделанные выше для комплексных модулей массивных тел, справедливы и для введенного здесь комплексного модуля Юнга ($E+iE^*\,\mathrm{sgn}\,\omega$). В этом случае также существует фазовый угол $\theta_Y=E^*/E$ между напряжением и деформацией; волны, распространяющиеся вдоль стержня, испытывают затухание с коэффициентом поглощения $a_Y=$ $=|\omega|\,\theta_Y/2c_Y$.

При распространении крутильных волн в стержне все нормальные напряжения равны нулю и распространение контролируется только модулем сдвига. Коэффициент и декремент поглощения, а также относительная потеря энергии, приведенные выше для объ-

емных поперечных волн в массиве, применимы и для крутильных волн в стержне. Наоборот — параметры поглощения, измеренные для крутильных волн, определяют комплексный модуль сдвига $(\mu+i\mu^* \operatorname{sgn}\omega)$, который непосредственно характеризует распространение поперечных волн в массиве.

Распространение поперечных и продольных волн в тонких пластинах логически представляет промежуточное звено между волнами в массиве и волнами в тонком стержне. Кроме того, пластины широко используются для изучения различных эффектов при двухмерном физическом моделировании. Как и в стержне, параметры поглощения, характеризующие распространение волн в пластинах, очень просто выводятся из уравнений (4.18). Рассмотрим продольную волну, бегущую вдоль оси x в тонкой пластине, центральная плоскость которой совпадает с плоскостью xY. Касательные и нормальные напряжения, перпендикулярные к плоскости пластины, пренебрежимо малы, а смещение в плоскости пластины в направлении, перпендикулярном к распространению волны, равно нулю ($E_{yy}=0$). При этих условиях уравнения (4.18) сводятся к следующим:

$$\left.\begin{aligned} P_{xx} &= [(\lambda+2\mu)+i(\lambda^*+2\mu^*)\operatorname{sgn}\omega]\,E_{xx}+(\lambda+i\lambda^*\operatorname{sgn}\omega)\,E_{zz},\\ P_{yy} &= (\lambda+i\lambda^*\operatorname{sgn}\omega)\,E_{xx}+(\lambda+i\lambda^*\operatorname{sgn}\omega)\,E_{zz},\\ &(\lambda+i\lambda^*\operatorname{sgn}\omega)\,E_{xx}+[(\lambda+2\mu)+i(\lambda^*+2\mu^*)\operatorname{sgn}\omega]\,E_{zz}=0. \end{aligned}\right\} \quad (4.33)$$

Напряжения P_{yy} не влияют на движения вдоль оси x. Исключение величины E_{zz} дает следующее уравнение для тонкой пластины:

$$P_{xx}=\frac{4(\mu+i\mu^*\operatorname{sgn}\omega)\,[(\lambda+i\lambda^*\operatorname{sgn}\omega)+(\mu+i\mu^*\operatorname{sgn}\omega)]\,E_{xx}}{(\lambda+i\lambda^*\operatorname{sgn}\omega)+2(\mu+i\mu^*\operatorname{sgn}\omega)}=(N+iN^*\operatorname{sgn}\omega)\,E_{xx}, \quad (4.34)$$

где

$$N=\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu},$$

$$N^*=\frac{4\mu^2\lambda^*+4(\lambda^2+2\lambda\mu+{}^{\prime}\mu^2)\,\mu^*}{(\lambda+2\mu)^2}.$$

Полученное уравнение аналогично уравнению (4.19): вместо комплексного модуля $(M+iM^*\operatorname{sgn}\omega)$ теперь стоит комплексный модуль $(N+iN^*\operatorname{sgn}\omega)$, поэтому все результаты, полученные для плоских волн в массиве, переносятся и на тонкие пластины, в частности, распространение волн характеризуется параметрами:

$$\theta_{PL}=N^*/N,\ c_{PL}=(N/\rho)^{1/2},\ a_{PL}=|\omega|\theta_{PL}/2c_{PL}.$$

Уравнение для поперечных волн, в которых смещение происходит параллельно пластине, в точности совпадает с уравнением для объемных поперечных волн в массиве. Таким образом, измерения параметров продольных и поперечных волн в тонких пластинах позволяют (при известной плотности) получить два комплексных модуля: $(N+iN^*\operatorname{sgn}\omega)$ и $(\mu+i\mu^*\operatorname{sgn}\omega)$.

Волны Рэлея в почти упругих средах

Затухание рэлеевских волн, распространяющихся вдоль поверхности почти упругой среды, может быть выражено через любую пару определенных выше комплексных модулей. Пресс и Хили [124] вывели формулу для затухания волны Рэлея, выразив его через параметры поглощения обоих типов волн. В основе вывода лежал тот факт, что особенности распространения плоских продольных и поперечных волн в почти периодических средах можно трактовать как следствие комплексного характера скоростей распространения обоих типов волн. Полученные таким образом комплексные скорости подставлялись вместо α и β в уравнение (2.48). В предположении малости поглощения, скорость распространения волны Рэлея определяется тем же самым выражением, что и для упругой среды, а коэффициент поглощения

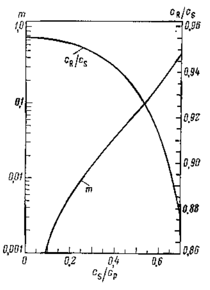


Рис. 4.5. Зависимости параметра m и скорости волны Рэлея от отношения скоростей поперечных и продольных волн в слабо поглощающей среде [96]

$$a_R = \frac{a_P(c_P/c_R)\left[4\left(1-c_R^2/c_S^2\right)c_S^2/c_P^2\right] + a_S(c_S/c_R)\left[4\left(1-c_R^2/c_P^2\right)-\left(2-c_R^2/c_S^2\right)^3\right]}{\left[4\left(1-c_R^2/c_S^2\right)c_S^2/c_P^2\right] + \left[4\left(1-c_R^2/c_R^2\right)-\left(2-c_R^2/c_S^2\right)^3\right]}. \qquad (4.35)$$

Потерю энергии за один цикл напряжения и фазовый угол между напряжением и деформацией возможно применить для характеристики рэлеевских волн. Однако уменьшение амплитуды на расстоянии одной длины волны по-прежнему служит подходящим параметром и выражается так же, как и логарифмический декремент затухания объемных волн: $\delta_R = a_R c_R / f$. Макдональд [96] получил аналог уравнения (4.35) и показал, что величина δ_R очень просто выражается через параметр m, который изображен на рис. 4.5

$$\delta_R = m\delta_P + (1+m)\delta_S,$$
$$m = \frac{a(2-b)(1-b)}{a(2-b)(1-b)-b(1-a)(2-3b)}, \qquad (4.36)$$
$$a = \left(\frac{c_R}{c_P}\right)^2, \quad b = \left(\frac{c_R}{c_S}\right)^2.$$

Отражение от плоской границы

Обсуждение плоских продольных волн в упругой среде заканчивалось тем, что отношение нормального напряжения и скорости частиц дает произведение $\rho\alpha$, которое часто называется нормальным акустическим импедансом среды. Коэффициент отражения, вычисленный для смещения продольной волны при нормальном падении на границу между двумя средами

$$R = (\rho_1\alpha_1 - \rho_2\alpha_2)/(\rho_1\alpha_1 + \rho_2\alpha_2). \tag{4.37}$$

Отражение от границы между двумя почти упругими средами получается из (4.37) подстановкой комплексной скорости $c_P(1 + i(\theta_P/2)\operatorname{sgn}\omega)$ вместо α для каждой из сред или подстановкой $i\omega\rho/(a_P + i\omega/c_P)$ вместо $\rho\alpha$. Таким образом, отношение амплитуд отраженной и падающих волн при нормальном падении дается выражением

$$R(\omega) = \frac{\rho_1/(a_{P1} + i\omega/c_{P1}) - \rho_2/(a_{P2} + i\omega/c_{P2})}{\rho_1/(a_{P1} + i\omega/c_{P1}) + \rho_2/(a_{P2} + i\omega/c_{P2})} \tag{4.38}$$

или

$$R(\omega) = \frac{\rho_1 c_{P1}(1 + i\operatorname{sgn}\omega\theta_{P1}/2) - \rho_2 c_{P2}(1 + i\operatorname{sgn}\omega\theta_{P2}/2)}{\rho_1 c_{P1}(1 + i\operatorname{sgn}\omega\theta_{P1}/2) + \rho_2 c_{P2}(1 + i\operatorname{sgn}\omega\theta_{P2}/2)}.$$

Поскольку θ_{P1} и θ_{P2} предполагаются малыми, полученное отражение мало отличается от случая идеальной упругости. Однако если $\rho_1 c_{P1}$ почти равно $\rho_2 c_{P2}$, малый коэффициент отражения оказывается сильно зависящим от θ_{P1} и θ_{P2}. В пределе коэффициент отражения будет равен $i\operatorname{sgn}\omega(\theta_{P1} - \theta_{P2})/4$. Данное выражение с точностью до множителя представляет преобразование Фурье функции — $1/\pi t$, из чего вытекает, что отраженная волна является преобразованием Гильберта падающей волны. Непричинность выходного сигнала опять проистекает из нашего предположения о независимости скорости от частоты в модели почти упругой среды.

Полностью аналогичные выражения справедливы для отражения поперечных волн от границы двух почти упругих сред.

ВОЛНЫ В МОДЕЛИ БИО

Теория Био

Под «теорией Био» мы понимаем описание процесса распространения волн в пористых средах [14, 15]. Основы этой теории можно найти в более ранних публикациях. Ряд частных решений, касающихся волн в пористых материалах, приведен в работах Цвиккера и Костена [203] и Морса [108]. Полная теория, позволяющая вычислять упругие константы и плотность (и, следовательно, скорости распространения), в точности согласующиеся с низкочастотным приближением теории Био, была предложена Гассманом [59]. Советским ученым Я. И. Френкелем в 1944 г. была опубликована статья [53], в которой изложена теория, равнозначная тео-

рии Био, и, кроме того, содержит коэффициенты взаимодействия используемые для описания сейсмоэлектрического эффекта во влажных грунтах. Упомянутые работы представляют сжатую и в то же время полную теорию, ставшую общепризнанной и широко применявшейся на практике. Позднее Био опубликовал упрощенный вывод некоторых из основных уравнений и предложил ряд обобщений, не изменяя существа первоначальной теории [10].

Предварительные обсуждения

В рассматриваемой модели пористая среда состоит из скелета или агрегата, который в среднем изотропен и содержит флюид, заполняющий сообщающиеся между собой поры. Скелет выполнен из упругого материала. Средние напряжения, действующие на элементарный объем, определяются через отношение суммы сил, действующих на твердый материал и жидкость, к площади выделенного элемента. Деформации определяются через смещения скелета и флюида. Известно, что потенциальная энергия в элементарном объеме может быть выражена как квадратичная функция от компонент деформации, что ведет к связи деформации с напряжением для пористого материала. Аналогично кинетическая энергия выражается как квадратичная функция скорости частиц в твердой и жидкой фазах. Произведения скоростей твердых и жидких фаз характеризует степень взаимодействия масс, которая интуитивно неочевидна. Приравнивание сил, действующих на фиксированный элемент, ведет к системе двух дифференциальных уравнений в смещениях. Затем они разделяются на пару уравнений, содержащих только дилатацию, и пару уравнений, описывающих вращение.

В случае невязкого флюида показывается, что в пористых средах распространяются два типа волн сжатия и одна поперечная волна, не испытывающие ни дисперсии, ни поглощения. Влияние вязкости флюида учитывается функцией дисперсии, которая предполагается пропорциональной квадрату относительной скорости между флюидом и скелетом. Константа пропорциональности зависит от вязкости флюида и проницаемости скелета. Функция рассеивания представляет собой дополнительный член в каждом из волновых уравнений, что ведет к дисперсии и поглощению.

Волны в однородной модели Био

Пусть скелет выполнен из твердого материала и его плотность ρ_s и объемный модуль k_s известны. Скелет имеет изотропную пористость Φ и изотропную проницаемость $\varkappa$. Пустой скелет представляет изотропную упругую среду со средней плотностью $\bar{\rho}$, средний модуль плоского сжатия $\bar{M}$ и средний модуль сдвига $\bar{\mu}$:

$$\bar{\rho}=(1-\Phi)\rho_s,\quad \bar{\mu}=\bar{\rho}\bar{c}^2_s,\quad \bar{M}=\bar{\rho}\bar{c}^2_P. \qquad (4.39)$$

Пористое пространство может быть заполнено флюидом, имеющим плотность ρ_f, объемный модуль k_f и вязкость η. Физическая ситуация точно такая же, как и в теории Гассмана.

Био предложил три новых параметра, характеризующих взаимодействие скелета и флюида. Первый параметр — это комплексная вязкость. Если мы рассматриваем флюид, колеблющийся в скелете с некоторой низкой частотой, то полный градиент давления во флюиде передается скелету посредством трения между обеими фазами. Однако на высоких частотах основная часть градиента давления расходуется на ускорение флюида, а трение флюида о скелет является малым по сравнению с силами энерции. Та часть общего градиента давления, которая передается скелету, выражается множителем $F(\varpi)$, а комплексная вязкость

$$\eta_c = \eta F(\varpi),$$

где

$$F(\varpi) = \varpi T(\varpi)/4[1 - 2T(\varpi)/i\varpi];$$
$$T(\varpi) = (\mathrm{ber}'\,\varpi + i\,\mathrm{bei}'\,\varpi)/(\mathrm{ber}\,\varpi + i\,\mathrm{bei}\,\varpi);$$
$$\varpi = (S\omega/\omega_c)^{1/2}. \qquad (4.40)$$

Здесь $\mathrm{ber}\,\varpi$ и $\mathrm{bei}\,\varpi$ суть функции Кельвина нулевого порядка [2], связанные с функциями Бесселя соотношением $\mathrm{ber}\,\varpi + i\,\mathrm{bei}\,\varpi = I_0(i^{1/2}\varpi)$. Штрихи сверху в (4.40) означают производную по переменной ϖ. По определению $\omega_c = (\eta\Phi/\varkappa\rho_f)$. Для значений ϖ, меньших единицы, $F(\varpi)$ практически вещественна и равна единице, откуда η_c приближенно равна η. Величина S в последней из формул (4.40) означает структурный фактор или относительную длину поровых каналов, «извилистость». Био предположил, что $S = 8$. Третьим параметром является фактор взаимодействия масс α_B, который может изменяться от единицы до бесконечности, в зависимости от геометрии пор. Био считал, что для скелета с изотропной пористостью $\alpha_B = 3$.

Хотя статьи Био могут непосредственно использоваться для вычисления скоростей и поглощения, в более поздней работе Джиртсмы и Смита [61] даны выражения для отраженных волн от плоской границы и представляется более логичным также использовать эту работу для определения свойств в каждой из пористых сред.

Предполагая наличие плоской продольной волны, колеблющейся как $\exp(i\omega t - Mx)$, Гиртсма и Смит вывели, что комплексный параметр M должен удовлетворять уравнению

$$(Z-1)\,(\sigma_L Z - \gamma_G + i\omega_G/\omega) - (\gamma_L - Z\sigma_K)^2 = 0, \qquad (4.41)$$

где

$$Z = -(H/\rho)\,(M^2/\omega)^2;\ M = a_P + i\omega/c_P;$$

ω_G определяется как $\eta_c/\varkappa_p$.

Один из корней уравнений (4.41) дает скорость и затухание волны сжатия первого типа (тип I), совпадающий с обычной продольной сейсмической волной. Второй корень описывает волну сжатия второго типа (тип II), который на низких частотах представляет волну диффузионного типа, но на высоких частотах имеет относительно небольшое затухание и распространяется как обычная волна.

Фигурирующие в (4.41) коэффициенты выражаются через введенные выше величины следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{k} = \overline{M} - 4\bar{\mu}/3,\\
&H = \frac{(1-\bar{k}/k_s)^2}{\Phi/k_f + (1-\Phi)/k_s - \bar{k}/k_s^2} + \overline{M},\\
&K = \frac{(1-\bar{k}/k)}{\Phi/k_f + (1-\Phi)/k_s - \bar{k}/k_s^2},\\
&L = \frac{1}{\Phi/k_f + (1-\Phi)/k_s + \bar{k}/k_s^2},\\
&\rho = (\bar{\rho} + \Phi\rho_f), \quad \sigma_K = (K/H),\\
&\sigma_L = (L/H), \quad \gamma_L = (\rho_f/\rho),\\
&\gamma_C = (\alpha_B\, \rho_f/\Phi\rho).
\end{aligned}\right\} \tag{4.42}$$

Чтобы подчеркнуть эффекты флюидонасыщения и показать переход от низкочастотного диапазона к высокочастотному, предположим, что скелет имеет свойства, близкие к рыхлому (сыпучему) гравию, залегающему на небольшой глубине: $\bar{c}_P = 900$ м/с, $\bar{c}_S = 450$ м/с, $\rho_s = 2{,}65$ г/см³, $k_s = 35{,}0 \cdot 10^{10}$ дин/см², $\Phi = 0{,}40$, $\varkappa = 300 \times 10^{-8}$ см² (300 дарси).

Значение пропорциональности слишком уж велико по сравнению с обычными значениями для пород коллекторов. Напомним, что проницаемость определяется согласно закону Дарси [см. уравнение (5.18)]. Предполагая водное насыщение, свойство флюида определим так: $\rho_w = 1{,}0$ г/см³, $k_w = 2{,}2 \times 10^{10}$ дин/см², $\eta_w = 0{,}006$ (г·см)/с (0,6 сантипуаз).

Результаты вычислений для водонасыщенного рыхлого гравия показаны на рис. 4.6. Приведенные зависимости могут отображать поведение сейсмических волн в водонасыщенных грунтах и оказаться полезными для сейсморазведки в том случае, когда отраженные волны проходят через подобный неконсолидированный материал вблизи поверхности земли. Как видно из рис. 4.6, *а*, скорость нормальной Р-волны изменяется на 1 %. В этом примере скорость продольной волны почти вдвое выше, чем в сухом скелете. Максимум декремента затухания наблюдается на частоте 40 Гц и его значение при этом не превосходит частотно-независимого декремента, характерного для сухого скелета. На рис. 4.6, *б* приведены скорости и декремент поглощения для волны типа II. Выше 100 Гц скорость практически постоянна, а декремент мал. На частотах выше 1000 Гц данная волна действительно представляет распространяющееся колебание. Можно представить себе, что она порождается флюидом, свойства которого изменены присутствием скелета. Ниже 10 Гц скорость уменьшается до нуля, а декремент достигает 2π. Эта быстро затухающая волна напоминает тепловой поток или процесс диффузии, когда вещественные и мни-

мые части комплексного коэффициента в показателе экспоненты равны между собой. Аналогичные вычисления публиковались и для флюидонасыщенных пород-коллекторов [182].

В теории Био имеется критическая частота $f_c=\eta\Phi/2\pi\varkappa\rho_f$. На частотах, меньших f_c, движение флюида при наличии градиента давления контролируется вязким трением о скелет. На частотах выше f_c доминирует энерция флюида. Из рассмотрения многих кривых, аналогичных представленным на рис. 4.6, ясно, что переходная частота, определяемая максимальным значением декремента или точкой наиболее быстрого изменения скорости, равна пример-

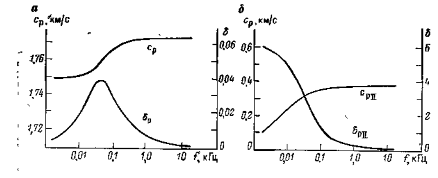


Рис. 4.6. Графики скорости и поглощения продольной волны в водонасыщенном гравии (а) и волны типа II в водонасыщенном гравии (б) [182]

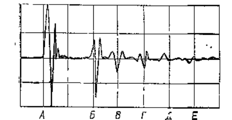


Рис. 4.7. Импульсы, зарегистрированные при распространении волны через систему вода — пористая порода — вода [121]

но 1/3 от f_c. Для водонасыщенного гравия $f_c=127$ Гц, тогда как максимум декремента наблюдается при 40 Гц.

На частотах, значительно превосходящих f_c волна II типа распространяется с малым затуханием. На рис. 4.7 убедительно подтверждается существование этой волны [121], а расчеты показывают, что параметры наблюдаемой в эксперименте волны находятся в полном согласии с теорией Био [43]. Эксперимент состоял в следующем. Пористая пластина, состоящая из окаленных стеклянных шариков (бусинок), помещалась в воду. Широкополосный датчик, работающий в мегагерцевом диапазоне, посылал плоский импульс, нормально падавший на пластину. Вступление *А* представляет прямую продольную волну, прошедшую через пластину, вступления *Б*, *Г* и *Е* являются многократными отражениями в пластине. Импульс *В* идентифицируется как волна типа II, прошедшая через пластину. В соответствии с граничными условиями на даль-

ней стороне пластины волна типа II создает обычную продольную волну, которая вновь распространяется внутри пластины и регистрируется в виде вступления *Д*.

Из рис. 4.6 и других данных [182] ясно, что для любой флюидонасыщенной породы скорость продольной волны фактически не зависит от частоты. Как показывают расчеты, этот факт справедлив и для поперечных волн. Отсюда можно заключить, что коэффициент отражения на границе между двумя флюидонасыщенными породами также не должен зависеть от частоты, поскольку отражение зависит от перепада произведения скорости на плотность. Однако возможность перемещения флюида через границу в процессе волнового движения означает, что отражение на границе двух флюидонасыщенных сред следует исследовать весьма тщательно. Это и является предметом следующего раздела.

Отражение на плоской границе

Чтобы проиллюстрировать влияние флюидонасыщения на отражения продольной волны, рассмотрим контакт между сухим и водонасыщенным гравием. Падающая сейсмическая волна с амплитудой A_{1i} обусловливает появление отраженной волны типа I с амплитудой A_{1r}, распространяющейся вверх волны типа II с амплитудой A_{2r}, проходящей продольной волны с амплитудой A'_1 и волны типа II с амплитудой A'_2 (рис. 4.8). Амплитуды волн характеризуют смещение частиц скелета, которое могло бы быть измерено приемником, впаянным в скелет.

Для каждой волны смещение флюида пропорционально смещению скелета с известными коэффициентами пропорциональности. Следовательно, перечисленные четыре амплитуды могут быть использованы для четырех граничных условий: непрерывность смещения скелета, непрерывность смещения флюида, непрерывность нормальных напряжений в твердой фазе и непрерывность давления во флюиде. Ключевым является то обстоятельство, что градиент давления вблизи границы воздух — вода может вызвать значительно большие относительные движения флюида и скелета, чем во внутренних областях каждой из сред. Будем считать, что отраженная волна содержит только A_{1r}. Обе волны типа II отбирают энергию, но они более быстро затухают и распространяются более медленно. Поэтому мы определим комплексный коэффициент отражения в виде

$$R\,e^{i\theta} = A_{1r}/A_{1i}. \tag{4.43}$$

При вычислениях, результаты которых приводятся ниже, использовались параметры для воздуха: $\rho_a = 1{,}21 \times 10^{-3}$ г/см³, $k_a = 1{,}42 \times 10^6$ дин/см² и $\eta_a = 1{,}83 \times 10^{-4}$ г·см/с. Константы скелета были взяты такими же, как и для сыпучего гравия, который рассматривался в предыдущем разделе. Если падающая волна распространяется в сухом гравии, значение R достигает 0,417 на низких частотах и 0,171 на высоких частотах, а θ достигает 180°. Наи-

большие изменения наблюдаются между 10 и 100 Гц. На частоте 40 Гц фазовый угол отличается от 180° на —15°. Если же падающая волна подходит к границе со стороны водонасыщенного гравия, R достигает 0,417 на низких частотах и 0,580 на высоких частотах. На частоте 40 Гц фазовый угол θ равен примерно 6°. Коэффициенты отражения показаны на рис. 4.9. На низких частотах значения коэффициента отражения точно совпадают с вычисленными по теории Гассмана. Сильное отличие между коэффициентами отражения на высоких частотах для разных направлений подхода падающей волны обязано колебательному движению флюида

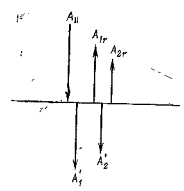
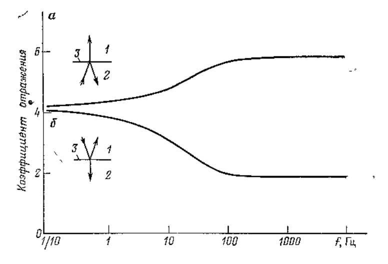


Рис. 4.8. Амплитуды волн на границе между двумя флюидонасыщенными средами [182]

Рис. 4.9. Зависимость коэффициента отражения от частоты для двух направлений падения

а — падение волны из водонасыщенного гравия на водонасыщенный, *б* — противоположное направление падения [182]; *1* — воздух; *2* — вода; *3* — гравий



через границу. Если бы граница представляла собой не имеющую массы мембрану, которая препятствовала бы перемещению жидкости из одной среды в другую, то коэффициент отражения на всех частотах был бы постоянным, совпадая со значением, вычисленным по теории Гассмана. При одном направлении падения волны, парциальное давление, освобождающееся в воде вблизи границы, уве-

личивает контраст свойств между средами и, таким образом, увеличивает коэффициент отражения. При другом направлении парциальное давление приводит к уменьшению контраста на границе.

В случае нормальных пород-коллекторов переход от низких к высоким частотам наблюдается в килогерцовом диапазоне, и рассматриваемые эффекты имеют меньшую величину.

Наличие флюида оказывает меньшее влияние на отражение поперечных волн. Основной эффект в этом случае обусловлен контрастом плотности. Однако частотная зависимость имеется и в этом случае. Для контакта воздух — вода в гравии коэффициент отражения поперечных волн варьирует от 0,056 на низких до 0,039 на высоких частотах, эффект не зависит от направления подхода падающей волны.

Волны в тонкослоистых пористых средах

Хотя колебание флюида практически не оказывает влияния на отражение от границы флюидонасыщенных пород-коллекторов в используемом интервале частот, некоторое относительное движение флюида и скелета действительно наблюдается. Этот факт обусловливает появление в каждой среде волн типа II, отбирающих часть энергии от распространяющейся продольной волны. Это преобразование энергии особенно сильно выражено на контактах газа и жидкости. В газонасыщенных гетерогенных средах большое число таких контактов может располагаться на расстоянии одной длины волны, что должно вызвать сильное поглощение энергии. Эта возможность исследовалась рядом авторов [44, 45].

На рис. 4.10 приведена идеализированная модель среды, в которой слои двух флюидонасыщенных пород чередуются с периодом повторения 2 (L_1+L_2). Согласно анализу, проделанному Уайтом и его соавторами [192] для области низких частот, поток флюида на границе слоев влияет на комплексную упругую константу, значение которой позволяет оценить скорость и поглощение. Применив теорию Био, Дутта с соавторами [44, 45] получили для рассматриваемой модели более общие результаты. Оба подхода находятся в хорошем согласии в низкочастотной области.

Кривая 1 на рис. 4.11 показывает, что особенно сильное поглощение можно ожидать в неконсолидированных песках с десятипроцентным газовым насыщением. Максимальное поглощение (в децибеллах на одну длину волны) равно 8,686 δ_P. Если величину b, совпадающую с L_1+L_2, положить равной 20 см, то максимальный декремент затухания будет наблюдаться на частоте 40 Гц. Эта частота значительно ниже границы низкочастотной (согласно теории Био) области, в которой поглощение, обязанное вязкости флюида, пренебрежимо мало в каждой из флюидонасыщенных сред. Но высокий градиент давления на множестве контактов газ—вода резко увеличивает роль волны типа II.

Кривая *II* на рис. 4.11 характеризует водонасыщенные пески, содержащие газовые пузырьки, а кривая *III* — это результат расчетов для флюидонасыщенных сфер, окруженных газонасыщенным песком. Очевидно, что волна типа II способна поглотить значительную долю энергии, когда малые количества газа присутствуют в водонасыщенных породах.

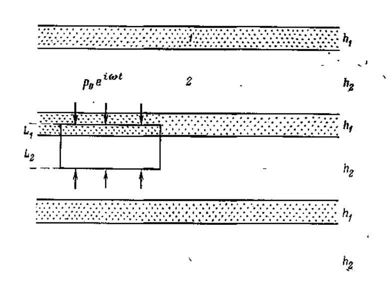


Рис. 4.10. Геометрия слоистой среды [192].
1, 2 — слои

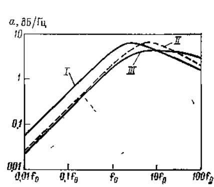


Рис. 4.11. Зависимость поглощения от частоты (в единицах f_0) для трех различных геометрий газонасыщенных пород при газонасыщении, равном 0,1 [45].
$(f_0)_{\text{I}} = 8830\ с^{-2}$; $(f_0)_{\text{II}} = 4710\ с^{-2}$; $(f_0)_{\text{III}} = 14\,960\ с^{-2}$

Вычисления также показывают, что наряду с затуханием, показанным на рис. 4.11, наблюдается увеличение скорости с частотой примерно на 30 %. Переходная область зависит от размеров слоев или сфер и в целом рассматриваемое явление относится по теории Био к низкочастотной области для обоих флюидонасыщенных пород.

Флюидонасыщенный почти упругий скелет

Чтобы установить роль потоков флюида в поведении пористой породы, в теории Био скелет не обязательно считать изотропным и упругим. В связи с этим уместно отметить работу, где исследованы флюидонасыщенные среды, в которых пустой скелет ведет себя как изотропное почти упругое тело [148]. Для такой среды константы $\bar{M}$ и $\bar{\mu}$ заменяются комплексными константами, чьи мнимые части $\bar{M}'$ и $\bar{\mu}'$ малы и не зависят от частоты. Твердый материал сам по себе является чисто упругим (в частности, параметр k_s является вещественным). Вязкость флюида бралась в виде комплексной функции частоты, как и при выводе уравнения (4.41). Решение модифицированного дисперсионного уравнения для плоской волны в безграничной среде дает скорость и затухание продольных волн. Полученное решение позволяет сделать общее заключение, что поглощение, обусловленное свойствами скелета, преобладает на низких частотах, а поглощение, обусловленное течением флюида, — на высоких. В частности, в рыхлом песке поведение флюида контролирует поглощение волн на частоте 1 кГц, причем поглощение в скелете доминирует на тех же частотах, что и в тонкозернистых осадках. Таким образом, граница между высокими и низкими частотами может варьировать в широких пределах, от сотен герц до сотен килогерц. Авторы работы [148] сделали вывод, что опубликованные данные по затуханию волн в осадках океанического дна находятся в согласии с модифицированной теорией Био, включающей параметр Q, характеризующий потери энергии в скелете.

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОГЛОЩЕНИЯ

Импульсы в образцах породы

Существенную часть экспериментов по распространению высокочастотных импульсов в породе можно классифицировать согласно геометрии расположения источников и приемников. Схематически возможные ситуации представлены на рис. 4.12. В каждом случае кристаллический источник S излучает волну в образец, а приемный пьезокристалл R генерирует электрическое напряжение, которое усиливается на вход электрического осциллографа. На рис. 4.12,*а* длина образца велика по сравнению с расстоянием источник — приемник L, поэтому отражения от боковых границ не влияют на регистрируемые сигналы. Но необходимо еще принять во внимание геометрическое расхождение, так как регистрируемый в приемнике сигнал будет зависеть от L, даже если образец является абсолютно непоглощающим. Если диаметр датчика велик по сравнению с преобладающей длиной волны импульса, то геометрическое расхождение мало. На рис. 4.12, *б* источник и приемник располагаются на торцах цилиндра, длина которого значительно больше диаметра. Поэтому прямой импульс будет отражаться от стенок цилиндра на почти касательных траекториях. В ре-

зультате, прямой импульс будет затухать вследствие превращения продольной волны в объемную поперечную, и наоборот. Система, показанная на рис. 4.12, *в*, применяется при изучении больших блоков породы размером до 1 м. Малый пьезокристаллический датчик излучает как продольную, так и поперечную волны с углами выхода 45°. Расстояние L изменяется так, чтобы угол выхода 45° оставался неизменным. Регистрируемый сигнал по-прежнему будет зависеть от L и притом сложным образом даже в непоглощающих средах. Но если кристаллы малы, а расстояние велико по сравнению с длиной волны, то предположение о том, что ампли-

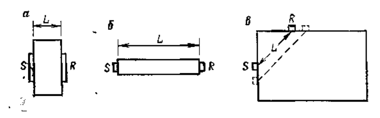


Рис. 4.12. Схемы регистрации высокочастотных импульсов в образцах горных пород

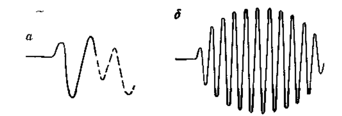


Рис. 4.13. Типичные формы импульсов для двух типов воздействия

туда изменяется обратно пропорционально расстоянию, можно считать оправданным.

Эксперименты с высокочастотными импульсами могут иметь различные разновидности, соответствующие регистрируемой форме импульса. В одной группе экспериментов приложенное к источнику электрическое напряжение имеет вид ступеньки и сигнал в приемнике представляет простой импульс малой длительности (рис. 4.13, *а*). В опытах другого типа (рис. 4.13, *б*) входное электрическое напряжение представляет 10 периодов или более синусоиды постоянной амплитуды на выбранной частоте. Регистрируемый сигнал представляет соответственно квазипериодический сигнал той же частоты, но с гладкой огибающей. В любом случае экспериментатор стремится получить зависимость поглощения от частоты (если она, конечно, существует) непосредственно из измерений амплитуды регистрируемых волн, сознавая, что такой подход может быть противоречивым. Импульсы второго типа имеют очень

узкий спектр, и амплитуда подобного цуга колебаний может служить хорошей мерой затухания на частоте осцилляций. В случае простых импульсов спектр имеет ширину в октаву или больше, поэтому максимальная амплитуда представляет собой усредненную величину затухания в полосе частот, средняя частота которой меньше видимой частоты импульса. Однако при допущениях, которые часто выполняются, для измерения затухания может быть использована четверть периода в начальной части импульса. Это кратко обсуждается ниже в разделе, посвященном полевым экспериментам.

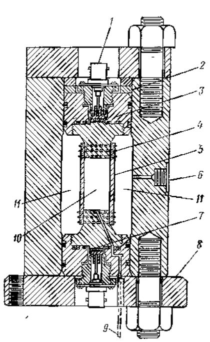
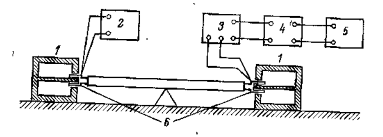


Рис. 4.14. Камера для измерения скорости волн в образцах под давлением [199].

1 — шток силового нагружения; *2* — металлическая втулка; *3* — система датчиков, *4* — проволочный бандаж; *5* — резиновый рукав; *6* — внешнее давление; *7* — керамический пьезоэлектрический кристалл; *8* — нижнее плато; *9* — подача флюида во внутрь образца; *10* — образец или керн; *11* — нефть или газ

Рис. 4.15. Схема установки для определения собственной частоты и декремента затухания тонкого стержня [20].

1 — магнит; *2* — генератор; *3* — усилитель, *4* — выпрямитель; *5* — регистратор; *6* — катушка



При экспериментах с высокочастотными импульсами можно использовать малые образцы пород, что имеет и свои преимущества и свои недостатки. Во многих случаях цилиндр диаметром 1—2 см и длиной в несколько сантиметров не может служить пред-

ставительным образцом породы, являющейся однородной при усреднении в большом объеме. Преимуществом малых образцов является то, что они могут быть подвергнуты давлению и насыщению флюидом при имитации глубинных условий. Для проведения подобных экспериментов во многих лабораториях использовалась специальная камера [199] (рис. 4.14) с различными дополнительными возможностями, включающими температурный контроль, и датчиками для генерирования поперечных или продольных волн в зависимости от поставленной задачи.

Метод резонанса на стержнях

Острота резонанса. Ряд самых первых измерений поглощения в твердых материалах основывался на измерении остроты резонанса тонких стержней, испытывающих продольную изгибную или крутильную вибрацию. Этот метод до сих пор остается более предпочтительным при измерениях поглощения упругих волн в породах в килогерцовом диапазоне частот. Один из первых вариантов подобной аппаратуры показан на рис. 4.15 [20]. При некотором усовершенствовании датчиков и электронной аппаратуры можно добиться абсолютно точного измерения частот. Такая установка может быть помещена в специальной камере, позволяющей контролировать температуру, внешнее давление, давление во флюиде и флюидное насыщение для воссоздания условий неглубокого залегания осадочных отложений.

При использовании продольной моды, изменяющейся по синусоидальному закону сила прикладывается к одному концу тонкого цилиндрического стержня, а продольные колебания измеряются на противоположном конце стержня. Датчик другой конструкции применяется для генерирования крутильных колебаний на возбуждаемом конце стержня; на противоположном конце в этом случае измеряется амплитуда угловой скорости вращения. На самой низкой частоте резонанса стержень имеет длину в несколько полуволн, а его диаметр мал по сравнению с длиной волны. В этом низкочастотном диапазоне продольные волны в отсутствии поглощения распространяются без дисперсии со скоростью, определяемой модулем Юнга: $c_Y = (E/\rho)^{1/2}$. Можно показать, что в почти упругом тонком стержне продольные волны распространяются практически с такой же скоростью, а поглощение проявляется в экспоненциальном уменьшении амплитуды с расстоянием [см. формулу (4.32)]. Если, например, сила действует на один конец стержня (рис. 4.16), то волна распространяется в положительном направлении оси x, вызывая силу, пропорциональную ${}^{-a_Y x}\ e^{-i\omega x/c_Y}\ e^{i\omega t}$. На свободном конце волна отражается; отраженная волна пропорциональна $e^{a_Y x}\ e^{i\omega x/c_Y}$. Суммируя все многократные отражения и учитывая изменение знака при каждом отражении, получим суммарную амплитуду силы

$$F = F_L \frac{\operatorname{sh}(a_Y x + i\omega x/c_Y)}{\operatorname{sh}(a_Y L + i\omega L/c_Y)}.$$

Каждая из упомянутых волн может быть также охарактеризована скоростью смещения частиц. В этом случае отражение происходит без смены знака, а в результате суммирования многократных волн получим

$$v = v_L \frac{\operatorname{ch}(a_Y x + i\omega x/c_Y)}{\operatorname{ch}(a_Y L + i\omega L/c_Y)}.$$

Используя теперь определение, согласно которому отношение силы к скорости частиц для одиночной волны, распространяющейся в положительном направлении, представляет характеристический импеданс Z_0 (и $-Z_0$ для отрицательного направления), мы

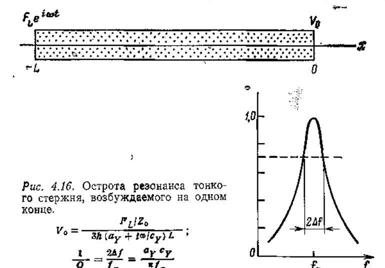


Рис. 4.16. Острота резонанса тонкого стержня, возбуждаемого на одном конце.

$$V_0 = \frac{F_L/Z_0}{\operatorname{sh}(a_Y + i\omega/c_Y) L};$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\Delta f}{f_n} = \frac{a_Y c_Y}{\pi f_n}$$

получим формулу, применимую к рассматриваемому эксперименту. Скорость на одном конце тонкого стержня, когда стационарная сила приложена к другому концу, определяется по формулам

$$v_0 = \frac{F_L/Z_0}{\operatorname{sh}(a_Y L + i\omega L/c_Y)}. \tag{4.44}$$

Условие резонанса состоит в том, что длина L кратна половине длины волны или что резонансная частота $f_n = nc_Y/2L$, откуда $2\pi f_n L/c_Y = n\pi$. Если в формуле (4.44) частота близка к резонансной, то

$$\omega L/c_Y = 2\pi(f_n + \Delta f) L/c_Y = n\pi + 2\pi\Delta f L/c_Y$$

$$\operatorname{sh}(a_Y L + i\omega L/c_Y) = \operatorname{sh}(a_Y L \pm 2\pi i \Delta f L/c_Y) = a_Y L \pm i 2\pi\Delta f L/c_Y$$

и

$$v_0 = F_L/Z_0(a_Y L \pm i2\pi L/c_Y).$$

Поскольку Δf представляет частотный сдвиг, при котором амплитуда составляет $1\sqrt{2}$ от пикового значения, вещественные и мнимые части знаменателя равны и $\Delta f = a_Y c_Y/2\pi$. Острота резо-

нанса часто определяется безразмерным параметром $Q=f/2\Delta f$. Согласно проведенным рассуждениям параметр Q, характеризующий резонанс продольных колебаний такого стержня, связан с затуханием контролируемых модулем Юнга волн соотношением

$$1/Q_Y = a_Y c_Y/\pi f. \qquad (4.45)$$

Подобные соотношения справедливы и для параметра Q, характеризующего резонанс и затухание крутильных волн.

Ослабление колебаний со временем. Если стержень возбуждается на одной из резонансных частот, то при снятии напряжения амплитуда вибрации будет экспоненциально уменьшаться со скоростью, зависящей от поглощения энергии в стержне. Если бы стержень был чисто упругим, его колебания совершались бы по закону $\cos 2\pi f_n t$, где $f_n = nc_Y/2L$. При замене c_Y на комплексную скорость $c_Y(1+i(\theta^2{}_Y/2)\,\mathrm{sng}\,\omega$ свободные колебания становятся затухающими как $e^{-\pi f_n \theta_Y t}\cos 2\pi f_n t$. За время в один период амплитуда уменьшается в $e^{-\pi\theta_Y}$ раз. Таким образом, измерение скорости ослабления колебаний позволяет вычислить декремент и, следовательно, Q_Y. В случае крутильных колебаний скорость ослабления связана с величиной Q_S.

Некоторые источники ошибок. Обнаружено много факторов, которые осложняют резонанс тонкого стержня. Во многих случаях эти осложнения сводятся к минимуму. Датчики, прикрепленные к концам стержня, могут быть пренебрежимо малы, но если масса датчика не очень мала, то энергия Q и скорость должны быть скорректированы [182]. В качестве второго фактора укажем на то, что отраженные от свободных концов волны, по которым определяется модуль Юнга, образовывают более сложные моды, в результате чего возникает небольшой краевой эффект. В-третьих, на высоких резонансных частотах длина волны может оказаться недостаточно большой по сравнению с диаметром стержня и в этом случае предполагавшаяся для низкочастотных продольных волн характеристика осесимметрического движения может оказаться несправедливой. Далее, любая асимметрия в источнике может возбуждать изгибную волну вдоль стержня, вызывая нежелательные резонансы. Чтобы уменьшить потери энергии в окружающее пространство, стержень должен поддерживаться проволоками в точках с наименьшей амплитудой колебаний. Чтобы уменьшить потери на излучение, стержень может быть помещен в вакуум или в гелий. Если образец помещен в кожух, то искажения скорости и затухания волны могут быть оценены и учтены.

Комплексные упругие константы. По измерениям на резонирующих тонких стержнях можно найти значение модуля Юнга и модуля сдвига. В дополнение к измерению скоростей и фазовых углов необходимо определить еще плотность образца, после чего можно воспользоваться соотношениями:

$$E=\rho c^2{}_Y,\ E^*=E\theta_Y,\ \mu=\rho c^2{}_S,\ \mu^*=\mu\theta_S. \qquad (4.46)$$

Когда стержень сделан из материала, который характеризуется двумя комплексными константами, то, воспользовавшись форму-

лами из табл. 3.1, можно найти модули плоского деформирования и всестороннего сжатия. Однако флюидонасыщенные породы двумя комплексными константами полностью не определяются. Поэтому результаты измерения резонансов для таких сред требуют более сложной интерпретации.

Флюидонасыщенные пористые стержни. Распространение волн растяжения вдоль флюидонасыщенных пористых цилиндров было описано с использованием теории Био [58] и проиллюстрировано на численных примерах [182]. Зависимость скорости и затухания продольных волн от свойств скелета и флюида оказывается довольно сложной даже в тех случаях, когда

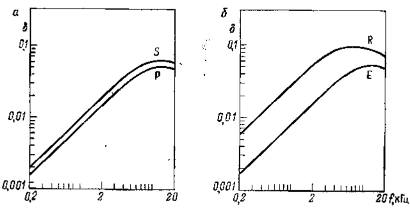


Рис. 4.17. Декременты затухания волн S и P в безграничной среде (*а*), волн *R*, *E* в стержне, вычисленные по теории Био и по формуле (4.47) (*б*) при f_c = =42 кГц

диаметр стержня мал по сравнению с длиной волны. Ключевым моментом является то, что исчезновение давления флюида на поверхности цилиндра создает сильную волну типа II, имеющую кажущуюся скорость в осевом направлении, совпадающую со скоростью продольной волны. Поскольку скорость волны типа II много меньше этой величины, движение флюида оказывается практически радиальным. Это относительное движение обусловливает поглощение энергии, отсутствующее при распространении плоской продольной волны в безграничной среде Био.

Для поглощаемой энергии зависит от радиуса стержня и декремент затухания достигает максимума, когда длина волны типа II значительно меньше длины окружности стержня. Если такие условия выполняются на частоте, значительно меньшей критической частоты f_c, то пик кривой декремента затухания является широким. Если частота достаточно велика по сравнению с f_c, то волна типа II имеет малое затухание и пик кривой декремента может быть острым и высоким (рис. 4.17 и 4.18).

На рис. 4.17 отображены результаты вычислений, характеризующих поведение скелета, состоящего из спекшегося порошка окиси алюминия и заполненного силикатной жидкостью N101.

Этот материал характеризуется следующими константами: $\rho_s=3{,}60$ г/см^3; $k_s=285\cdot10^{10}$ дин/см^2; $c_P=4600$ м/с; $c_S=3250$ м/с; $\Phi=0{,}37$; $\varkappa=14\cdot10^{-8}$ см^2; $\rho_f=0{,}934$ г/см^3; $k_f=7{,}3\cdot10^9$ г/см^2; $\eta=9{,}3\cdot10^{-2}$ г/(см·с); $a=2{,}54$ см.

На рис. 4.17 приведен декремент затухания для плоских продольной и поперечной волн в безграничной среде. Заметим, что максимум декремента затухания для обеих волн наблюдается примерно на 13 кГц, тогда как вычисленное значение f_c равно примерно 42 кГц. При этом отмечается также очень небольшая дисперсия скорости. В рассматриваемом частотном диапазоне скорость продольных волн возрастает от 4360 до 4410 м/с, а скорость

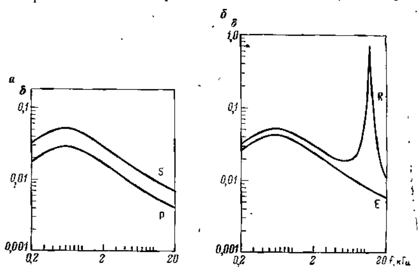


Рис. 4.18. Декременты затухания волн P и S в безграничной среде (а), волн *R*, *E* в стержне, вычисленные по теории Био и по формуле (4.47) при $f(0)=1{,}9$ кГц (*б*)

поперечных волн — от 3030 до 3070 м/с. Символом *R* на рис. 4.17 отмечен декремент затухания волны растяжения, распространяющейся вдоль двухдюймового стержня согласно вычислениям по формуле (2.19) из работы Гарднера [58]. Максимум на частоте 6 кГц соответствует длине волны типа II, приблизительно равной длине окружности стержня. Кривая *E* показывает декремент затухания волн, который следует ожидать при известных δ_P и δ_S в предположении, что стержень может рассматриваться как поглощающая изотропная среда. В этом случае

$$\delta_Y = m\delta_P + (1-m)\delta_S, \qquad (4.47)$$

где

$$m = M\mu/(M-\mu)\,(3M-4\mu).$$

Величина δ_P достигает максимума при 13 кГц независимо от диаметра стержня. Во всем частотном диапазоне декремент зату-

хания волн в стержне значительно больше, чем можно было бы ожидать при применении формулы для поглощающего изотропного тела.

На рис. 4.18 даны результаты вычислений для схожего скелета из оксида алюминия, насыщенного водой. Эта среда характеризуется следующими параметрами: $\rho_S=3{,}52$ г/см^3; $k_s=285\cdot10^{10}$ дин/см^2; $\bar{c}_P=5000$ м/с; $c_S=3100$ м/с; $\Phi=0{,}30$; $\varkappa=15\cdot10^{-8}$ см^2; $\rho_f=1{,}00$ г/см^3; $k_f=2{,}2\cdot10^{10}$ дин/см^2; $\eta=6\cdot10^{-3}$ г/(см·с); $a=2{,}54$ см.

На рис. 4.18 декремент затухания волн P и S достигает максимальных значений на частоте примерно 0,6 кГц, которая составляет одну треть от величины 1,91 кГц, вычисленной для f_c. Согласно формуле (4.47) декремент затухания для стержня также достигает пика при 0,6 кГц. Но значение декремента затухания выше ожидаемого и его значение зависит от диаметра стержня. Наиболее сильное расхождение состоит в наличии пика при 12 кГц. Здесь вычисленный декремент затухания на два порядка выше того значения, которое, следовало бы ожидать на основе формулы (4.47).

Метод резонанса на сферах

В 1964 г. Фрейзер и Лекроу [52] предложили метод определения упругих констант и параметров поглощения твердых материалов путем измерения остроты резонанса различных мод вибрирующего сферического образца. Этот метод применялся к специально изготовленным сферам пород, стекла и металла [17, 98]. Аналогично анализировались собственные колебания Земли, вызванные большими землетрясениями, с целью уточнения законов измерения скорости и поглощения с глубиной [147].

Использовавшаяся Фрейзером и Лекроу модификация схемы показана на рис. 4.19. Сферический образец находится в контакте с двумя датчиками. Первый шаг состоит в посылке квазигармонического сигнала с медленно меняющейся частотой и регистрацией выходного сигнала на *xy*-плоттере. Сравнивая пики выходного сигнала с резонансными частотами, вычисленными для изотропной сферы, можно идентифицировать каждый пик со специфическими сфероидальными или крутильными собственными частотами. Второй шаг состоит в возбуждении датчика по одной из резонансных частот с последующим снятием напряжения и измерением затухания сигнала на выходе приемника. Эти измерения позволяют найти величину Q для каждой моды. В случае тороидальных мод, примеры которых приведены на рис. 4.20, деформация определяется сдвиговой жесткостью μ и, следовательно, добротность этих мод непосредственно равна Q_S. Для сфероидальных мод деформация зависит от λ и модальное значение Q может быть вычислено как средневзвешенное от Q_P и Q_S.

Чтобы визуализировать собственные колебания сферы, необходимо знать функции, описывающие распространение волн в сферических координатах. В разделе «Волны вблизи плоской границы» было замечено, что решением волнового уравнения в прямо-

угольных координатах представляет экспоненту вида e^{Mx}. Для волн, распространяющихся вдоль оси x, величина M должна быть чисто мнимой и мы ее обозначим ik_x. Линейные комбинации функций $e^{-ik_x x}$ и $e^{ik_x x}$ образуют тригонометрические функции $\cos k_x x$ и $\sin k_x x$, обеспечивающие эквивалентное описание решений волнового уравнения. Большинство возможных комбинаций могут быть охарактеризованы следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \sin k_x x \\ \cos k_x x \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sin k_y y \\ \cos k_y y \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sin k_z z \\ \cos k_z z \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{Bmatrix}.$$

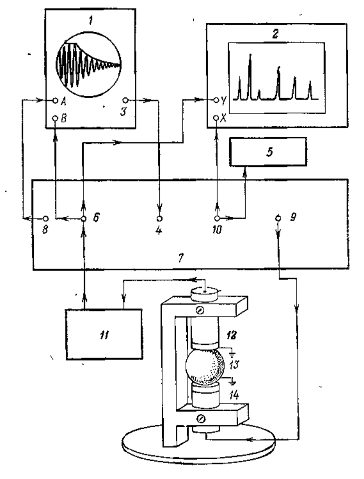


Рис. 4.19. Блок-диаграмма аппаратуры для измерения резонанса на сферах [98].
1 — осциллограф; *2* — *XY*-плоттер; *3* — подача стробимпульса; *4* — прием стробимпульса, *5* — счетчик частоты; *6* — детектор обратной связи; *7* — электронная резонансная система; *8* — RC-задержка; *9* — подача синусоидального напряжения; *10* — выходное синусоидальное напряжение; *11* — широкополосный усилитель А-60; *12* — приемник; *13* — образец; *14* — излучатель

В разделе «Волны вблизи плоской границы» особое внимание уделялось независящим от y решениям, которые при $u_y=0$ определяли SV-волну, а при $u_x=0$ и $u_z=0$ — SH-волну. В разделе «Упругие волны в цилиндрических координатах» строится решение, включающее функции Бесселя и тригонометрические функции. При этом отмечается, что широко используемая комбинация обычных Бесселевых функций $[J_n(x)+iN_n(x)]$, называемая функцией Ханкеля, аналогична комбинации $(\cos x+i\sin x)$, дающей экспоненту e^{ix}. В терминах обычных функций Бесселя и тригонометрических функций решения волнового уравнения в цилиндрических координатах образуют следующие формы:

$$\begin{Bmatrix} J_n(k_r r) \\ N_n(k_r r) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sin k_z z \\ \cos k_z z \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{Bmatrix}.$$

В этом случае особое внимание уделяется решениям, независящим от θ при $n=0$. Решение, характеризующее волну SV, получается при $u_\theta=0$, а чисто крутильное колебание наблюдается, когда u_θ является единственной компонентой смещения.

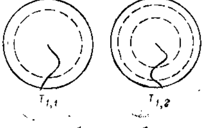


Рис. 4.20. Зависимость смещения от радиальной координаты для тороидальных мод

Переходя к сферическим координатам, обозначим через θ — поперечный, а через Ψ — азимутальный угол. Решения волнового уравнения теперь выражаются через сферические Бесселевы функции и функции Лежандра [2]. Комбинация $[j_l(x)+in_l(x)]$ также имеет специальный смысл и обозначается как $h_l^{(1)}(x)$. Для аналогичной комбинации функций Лежандра $P^l_m(\cos\theta)$ и $Q^l_m(\cos\theta)$ специальное обозначение не используется. Возможные решения волнового уравнения в сферических координатах имеют вид

$$\begin{Bmatrix} j_l(k_r r) \\ n_l(k_r r) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sin m\Phi \\ \cos m\Phi \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_l^m(\cos\theta) \\ Q_l^m(\cos\theta) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{Bmatrix}.$$

Представляют интерес решения, не зависящие от одной координаты, например от Φ. Если $u_\Phi=0$, то решение представляет собой одну из сфероидальных мод, а если u_Φ является единственной отличной от нуля компонентой смещения, то движение будет крутильным и представляет собой одну из тороидальных мод. Функция $Q^m_l(\cos\theta)$ принимает бесконечное значение при $\theta=0$ и поэтому не может быть использована для описания свободных колебаний сферы. По аналогичным причинам отбрасываются решения, содержащие функцию $n_l(k_r r)$, обращающуюся в бесконечность

при $r=0$. Один из потенциалов, описывающих сфероидальные и тороидальные моды, пропорционален произведению

$j_l(k_r r) P^0_l(\cos\theta) \sin \omega t$.

Комбинируя скалярный и векторный потенциалы так, чтобы удовлетворить условиям на свободной поверхности сферы, найдем смещения, зависящие от $P^0_l(\cos\theta)$. Эта функция переходит через нуль l раз, когда θ изменяется от 0 до π. Следовательно, число l означает число нодальных окружностей на поверхности сферы. Для фиксированной резонансной моды смещение проходит через нуль на интервале между центром сферы и ее радиусом ровно n раз, поэтому n представляет собой число нодальных сферических поверхностей внутри сферы.

Сфероидальные и крутильные моды обозначаются при помощи указанных двух индексов: ${}_nS_l$ и ${}_nT_l$. Тороидальные собственные колебания содержат только деформации сдвига, так что величина Q^{-1} тороидальной моды непосредственно определяет θ_S. Величина Q^{-1}, характеризующая сфероидальную моду, зависит и от θ_P и от θ_S.

Квазистатические измерения

При оценке поглощения в малых образцах пород ставятся эксперименты, в которых напряжение изменяется так медленно, что образец практически находится в состоянии статического равновесия. В этой ситуации возникает возможность измерить упругие константы и параметры поглощения в частотном диапазоне, характерном для сейсморазведки, а в ряде случаев и для сейсмологии землетрясений.

Крутильный маятник. В работе [119] для измерения параметров поглощения поперечных волн приводится эксперимент, в котором в качестве пружины крутильного маятника использовался тонкий стержень известняка формации Зеленхофен. Упрощенная схема элементов крутильного маятника приведена на рис. 4.21. Верхний торец тонкого стержня породы прикреплен к жесткой станине, а верхний конец соединен с массой, которая имеет большой момент инерции и поддерживается при помощи опоры. Массе придается угловое смещение, после чего нагрузка снимается, в результате стержень и масса осциллируют с частотой, зависящей от жесткости цилиндра и от момента энергии массы. Если прочие потери сделаны малыми, скорость затухания осцилляции контролируется поглощением в породе. Полученный в результате такого эксперимента декремент затухания, равный натуральному логарифму отношения соседних пиков на осциллограмме, совпадает с декрементом, равным натуральному логарифму амплитуд поперечной волны на расстоянии одной длины волны в безграничной среде. В обеих ситуациях имеет место одна и та же связь деформации с напряжением.

Изгибание брусков. Многие исследователи проводили измерения на прямоугольных брусках или тонких стержнях, подвергаемых изгибу. В этом случае исходный элементарный объем характеризуется модулем Юнга в экспериментах на сжатие или расширение. Один из экспериментов был проведен с образцом породы в форме бруска длиной 6,5 см, шириной 2,5 см и толщиной 1 см, зажатым с одной стороны [27]. Прикрепленная к свободному концу катушка обеспечивала движущую силу, а другой катушкой измеряли боковые смещения на том же конце бруска по мере того, как брусок испытывал изгибные колебания на частоте, низкой по сравнению с собственной частотой нагруженного бруска. Баланс в электрической сети указывал на отношение энергии, теряемой за один период, к максимальной энергии, запасенной в бруске ($\Delta W/W$). Поскольку для каждого элемента бруска коэффициент пропорциональности между напряжением и деформацией совпадает с модулем Юнга, измеряемое в этом эксперименте поглощение дает параметр поглощения, характеризующий распространение продольных волн в тонких стержнях. Значения $(\Delta W/W)_Y$ для образцов гранита, известняка и песчаника оказались практически не зависящими от частоты в интервале от 40 до 120 кГц.

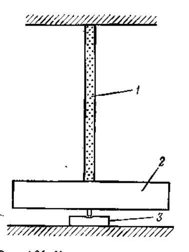


Рис. 4.21 Упрощенная схема крутильного маятника.

1 — образец породы; *2* — большой момент инерции, *3* — опора

Очень похожий эксперимент был проведен на брусках породы размером 20×1×0,5 см, зажатых на обоих концах. Воздействие прикладывалось к центру бруска в частотном диапазоне 2—4 Гц [167]. Удельная потеря энергии для девяти образцов породы при переходе от 2 до 40 Гц увеличивалась в 2 раза, основные потери наблюдались на частотах ниже 10 Гц. Фактически в этом эксперименте измерялся фазовый угол между силой и смещением, по которому вычислялась удельная потеря энергии по формуле $\Delta W/W = 2\pi\theta$.

Для измерения модуля Юнга и величины Q_Y на лунных образцах и на других хрупких материалах применялся изгибный аналог крутильного маятника [160]. Симметричное маховое колесо прикреплялось к каждому концу бруска, ось вращения каждого из маховиков была перпендикулярной к длинной оси бруска. Момент инерции маховиков и жесткость бруска в изгибе выбирались так, чтобы покрыть низкочастотный диапазон.

Способ вращения консоли, ранее применявшийся к металлам и полимерам, использовался для определения Q_Y в гранитах и долеритах [164]. Принцип действия показан на рис. 4.22. Один ко-

нец тонкого цилиндрического стержня вставляется в горизонтальную подставку таким образом, что он может вращаться в любом направлении. При отсутствии вращения стержень наклоняется под своим собственным весом и свободный конец перемещается вниз на расстояние D. При наличии вращения любой сдвиг фазы, обязанный поглощению, вызовет перемещение свободного конца стержня на величину d по горизонтали в направлении, зависящем от направления вращения. Теоретический анализ показывает, что отношение указанных двух перемещений позволяет определить поглощение в стержне:

$$d/D = \theta_Y = 1/Q_Y. \tag{4.48}$$

При больших амплитудах деформации (около 10^{-4}) величина Q_Y для гранита оказалась равной примерно 125, а для долерита около 50, независимо от частоты в интервале от 0,007 до 0,6 Гц.

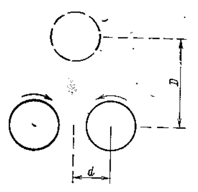


Рис. 4.22. Смещение конца консоли при вращении

Диаграмма деформация—напряжение. Изящный прямой метод измерения упругих констант и параметров поглощения состоит в регистрации напряжения и деформации при синусоидальном нагружении малого объема породы. В проведенных исследованиях [23] образцы песчаника, базальта и гранита были изготовлены в виде цилиндрических патронов, имеющих размеры: длина 28 см, внешний диаметр 4,4 см и толщина 0,5 см. Нижнее основание образца фиксировалось, а верхнему основанию сообщался известный вращательный момент посредством двух катушек громкоговорителя, смонтированного на концах коромысла. При заданной длине патрона его крутильная деформация может быть измерена изменением в емкости. Данный эксперимент позволяет построить зависимость напряжения от деформации в частотном диапазоне от 0,001 до 0,6 Гц. При деформациях меньших, чем 10^{-6}, диаграмма имела эллиптическую форму, что указывает на линейность связи деформации и напряжения. При деформации в 10^{-5} отклонение от эллиптической формы было очевидным. Для песчаника θ_S падает с 0,014 до 0,009 в частотном интервале 0,001—1,0 Гц, для базальта θ_S имеет небольшой максимум с средним значением около 0,002 и, наконец, для гранита величина θ_S практически постоянна и равна 0,00375. В каждом случае изменение μ с частотой находилось в соответствии с измеренными параметрами поглощения и требованием причинности.

Полевые измерения

Если задача состоит в том, чтобы понять природу затухания сейсмических волн, распространяющихся в земле, то необходимость измерения свойств горных пород в месте их залегания представляется очевидной. Соответствующие наблюдения можно разделить на три категории: 1) регистрация объемных волн в ряде точек однородной породы при условии, что источники и приемники достаточно удалены от границ тела; 2) регистрация скорости движения частиц в ряде точек слоистого разреза неглубоко залегающих частей земной коры, вызванной распространяющейся вниз волной и многократными отражениями внутри отдельных слоев; 3) наблюдения поверхностных волн и различных собственных колебаний Земли, вызванных землетрясениями.

Однородные породы. В 1953 г. Риккер [127] наблюдал прямую продольную волну от малых зарядов в сланцах формации Пиерре, представляющих мощную толщу однородного материала. Базируясь на изменениях формы волны с расстоянием, Риккер сделал вывод, что поглощение волн может быть обусловлено вязким трением, пропорциональным скорости деформации. Смысл этого результата состоит в том, что затухание низкочастотных синусоидальных волн должно быть пропорциональным квадрату частоты. В литературе высказывались сомнения в правильности этой интерпретации [168], и, действительно, современная переинтерпретация зарегистрированных Риккером сигналов показывает, что поглощение пропорционально первой степени частоты [83]. Такое истолкование данных Риккера также базируется на изменении формы импульса в зависимости от расстояния (или, точнее, от времени распространения). С этой целью используется время возрастания τ, определенное как отношение амплитуды первого пика сигнала к максимальному значению производной по времени, достигаемому на возрастающей части сигнала до первого пика. Если сигнал в некоторую точку приходит в момент времени t_0 и имеет время возрастания τ_0, то время возрастания в более удаленной точке, куда сигнал приходит в момент t, будет

$$\tau=\tau_0+C(t-t_0)/Q \qquad (4.49)$$

Результаты детальных измерений сейсмических колебаний в сланцах формации Пиерре были опубликованы Мак-Донелом и его соавторами [102]. В этих исследованиях импульсы прямых поперечной и продольной волн подвергались Фурье-анализу. Простота волновой картины и отсутствие микросейсм и других мешающих сигналов хорошо видны на рис. 4.23. В предположении о сферическом расхождении спектральная амплитуда на любой частоте изменяется как

$$\left.\begin{aligned} V(\omega) &= V_0(\omega)\, e^{-a_p r}/r, \\ \ln[rV(\omega)] &= \ln[V_0(\omega)] - a_p r. \end{aligned}\right\} \qquad (4.50)$$

График, изображающий зависимость величины в левой части последнего равенства от расстояния, оказался прямой линией с

наклоном a_P. Было найдено, что значения коэффициента a_P пропорциональны частоте в интервале от 50 до 500 Гц. В результате исследования была установлена зависимость $a_P = 4{,}5 \cdot 10^{-7} f$ с/см. Кроме того, авторы пришли к выводу об отсутствии дисперсии скорости. Точно таким же образом была проанализирована прямая поперечная волна, возбужденная грузом, падающим на дно скважины. В результате этого анализа было получено, что $a_S = 4 \cdot 10^{-6} f$ с/см.

Третья серия экспериментов была проведена в тех же сланцах формации Пиерре в Восточном Колорадо с целью изучения поглощения и дисперсии вертикально распространяющихся объемных

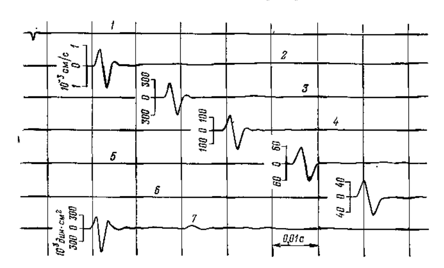


Рис. 4.23. Сейсмограмма продольной волны, распространяющейся вдоль скважины [102] при взрыве 450 г динамита на глубине 85 м.

1 — отметка момента взрыва; *2* — вертикальный приемник на глубине 110 м, скв. 3; *3* — то же, на глубине 150 м, скв. 9; *4* — то же, на глубине 190 м; скв. 4; *5* — то же, на глубине 220 м, скв. 10; *6* — то же, на глубине 250 м, скв. 5; *7* — импульс давления на глубине 115 м, скв. 3

волн [75]. Приемники были зацементированы на глубинах от 120 до 300 м через интервал 30 м. Продольные волны возбуждались зарядом, помещенным на глубине 45 м. Данные анализировались с помощью формул

$$\left.\begin{aligned} V(\omega) &= V_0(\omega)\, G(r)\, e^{-a_P(\omega)\, r}, \\ \ln(V_2/V_1) &= \ln(G_2/G_1) - a_P(\omega)\,(r_2 - r_1). \end{aligned}\right\} \qquad (4.51)$$

В этом случае знание геометрического фактора $G(r)$ не обязательно, поскольку он не зависит от частоты. График зависимости $\ln (V_2/V_1)$ от частоты представляет прямую линию, если a_P пропорциональна частоте. Янек получил значение декремента поглощения для продольной волны, равным 0,07, что соответствует зависимости $a_P = 3{,}2 \cdot 10^{-7} f$ с/см. Значение скорости оказалось рав-

ным 2200 м/с. Был замечен слабый намек на дисперсию скоростей: увеличение скорости на 0,6 % в интервале от 100 до 300 Гц. Декремент поглощения поперечных волн, по данным Янека, равен 0,092, что соответствует $a_P = 8{,}6 \cdot 10^{-7} f$ с/см. Для возбуждения поперечных волн использовался горизонтальный вибратор, помещенный на земной поверхности.

Аналогичная серия измерений проведена в известняках формации Элленбургер в Центральном Техасе [141]. Приемники размещались в скважине на глубинах от 120 до 420 м, взрыв заряда массой 4,5 кг производился на глубине 40 м. Измеренный сигнал по форме близок к одному периоду синусоиды, имеющий период 3,5 мс независимо от расстояния. Скорость уменьшения амплитуды с расстоянием составляет 4 Дб на 300 м. Предполагая, что поглощение линейно зависит от частоты и отнеся указанную выше величину к частоте 300 Гц, получим, что коэффициент поглощения волн в известняках формации Элленбургер составляет $4 \cdot 10^{-8} f$ с/см, что примерно на порядок меньше, чем поглощение для сланцев формации Пиерре.

Осадочные отложения. Однородность в пределах любого существенного по размерам объема кристаллических пород является редким явлением, даже если придерживаться обсуждавшейся ранее концепции «однородности в среднем». В ряде случаев может оказаться достаточным представить неоднородный разрез, как малое число однородных слоев, уделив соответствующее внимание роли многократных отражений и волноводных явлений в слоистых средах. Однако из каротажных диаграмм и прямых измерений хорошо видно, что мощность слоев в осадочных отложениях столь мала, что практически невозможно учитывать каждый из имеющихся однородных слоев. Поэтому следует искать средние характеристики среды. Реалистические модели слоистой среды применительно к условиям сейсморазведки были объектом теоретического анализа и экспериментальных исследований в течение многих лет [12, 131]. Не вдаваясь в обсуждение всей этой общей проблемы, рассмотрим некоторые полевые эксперименты, предпринятые с целью оценки среднего поглощения волн в типичных осадочных породах.

Туллус и Рейд [163] провели детальные измерения затухания в плейстоценовых отложениях Гальфа Коаст. Калиброванные сейсмоприемники размещались с шагом 6 м на глубинах от 150 до 300 м и с шагом 15 м на глубинах от 30 до 150 м. Источниками служили взрывы в неглубоких скважинах. В прямоугольном окне исследователи оставляли на записи только прямую волну P, обрезая многократные отражения. Понимая, что в тонкослоистом разрезе такой прием не является точным, авторы предположили, что отклонение спектров сигналов, зарегистрированных в двух сейсмоприемниках, дает передаточную функцию (спектральную характеристику), характеризующую распространение затухающей волны. Используя много источников и приемников для изучения поглощения на различных глубинах, авторы пришли к выводу, что ус-

реднение данных в четырех интервалах глубин является оправданным. Декремент поглощения оказался независящим от частоты, принимая значения: 1,5 для глубин 0,30—3 м (глинистые пески—глина); 0,017 на глубинах 2,4—30 м (глина — пески); 0,042 на глубинах 30—150 м (глина с примесью песка); 0,023 на глубинах 150—300 м (глина — песок). Авторы отметили, что в экспериментах изучалось только поглощение волн и не оценивалась дисперсия скорости.

Гэнли и Канасевич [57] определили поглощение и дисперсию по данным наблюдений от взрывов в море Беафорт. Источниками служили воздушные пушки, сигналы регистрировались на четырех глубинах. Для оценки поглощения и фазовой скорости использовалось отношение спектров. Предварительно вводились поправки за внутрислойные многократные отражения с малыми запаздываниями. Для введения этих поправок требуется знание скорости и плотности в каждом из тонких слоев, используемых для расчета синтетической сейсмограммы без учета поглощения. Эффективность введения такой поправки была проверена на численных моделях. По данным Гэнли и Канасевича, величина Q не зависит от частоты и составляет 42 на глубинах 549—1193 м и 67 на глубинах 945—1311 м. Дисперсия скорости в частотном диапазоне 20—80 Гц соответствует усеченному линейному закону модели Футтермана [см. форму (4.67)].

Хауге [65] рассчитал значение поглощения по данным сейсмокаротажа в пяти скважинах. Одна скважина находилась в Западном Техасе, остальные четыре — в области Гальфа Коаст. Способ спектрального отношения использовался для оценки суммарного затухания для двух точек, отстоящих друг от друга на 300 м. Предполагалось, что затухание обязано двум явлениям: уменьшению амплитуды и расширению импульса, вызванным поглощением, и изменению амплитуды и частотного состава в связи с образованием сопутствующих многократных волн. Второй эффект оценивался на основе данных акустического каротажа по методу, описанному Шёнбергером и Левиным [140], после чего измеренное затухание корректировалось. Влияние внутрислойных многократных волн на прямую волну исследовалось и другими авторами [106, 146]. Общий вывод состоит в том, что в диапазоне частот, характерных для сейсмической разведки, влияние внутрислойных многократных отражений на затухание волн в типичных осадках мало по сравнению с истинным поглощением. Хауге нашел, что вычисленное кажущееся поглощение составляет от 10 до 50 % от измеренных величин. Декремент поглощения изменяется от 0,01 до 0,1 и имеет положительный коэффициент корреляции с процентным содержанием песка в различных интервалах.

Сейсмологические данные. Об интенсивности усилий и существенном прогрессе при определении структуры Земли по сейсмическим волнам, можно судить по обзорам, вышедшим в последнее время [5, 126, 147]. Не претендуя на полноту, попытаемся ознакомить читателя с этой областью исследования.

Первым шагом на пути к построению реалистической модели Земли является модель сферы, выполненная локально-изотропным твердым веществом, у которого параметры λ, μ и ρ зависят только от радиуса. Годографы волн P и S дают информацию о глубоких частях Земли, а длиннопериодные поверхностные волны позволяют определить мощность коры и скорость волн в верхней мантии. Прогресс в методах измерения, достигнутый в последние 15 лет, обеспечил измерение основных мод собственных колебаний Земли, вызванных мощными землетрясениями, частоты которых определяются изучаемой упругой моделью. Вторым шагом к реалистической модели Земли является введение поглощения при рассмотрении упругих констант как комплексных величин. Определение соответствующих параметров по затуханию волн P и S связано со многими ограничениями, поскольку на амплитуду объемных волн сильно влияют рассеивание и локальные условия вблизи каждого сейсмографа. Затухание поверхностных волн более доступно прямому измерению, особенно тех волн, которые несколько раз обогнули земной шар. Ослабление реверберации, следующих за большим землетрясением при надлежащей фильтрации, можно рассматривать как затухание отдельных резонаторов. Перечисленные источники информации позволили вывести зависимость параметров поглощения от радиального расстояния. Поскольку наличие поглощения обусловливает дисперсию скорости, следующий шаг состоит в изучении частотной зависимости упругих констант. Хотя радиальная модель Земли в общем и соответствует имеющимся наблюдениям, вещество Земли латерально неоднородно, сама Земля не является сферой и вращение Земли имеет ряд резонансных пиков. В предположении, что модуль всестороннего сжатия чисто упругий (это означает отсутствие потерь энергии при сжатии), $Q_P = (4/3)\ (\beta/\alpha)^2 Q_S$, этого достаточно для определения величины Q_S как функции радиуса. В грубом приближении Q_S равно 200 для верхней мантии, затем уменьшается до 100 на глубинах 100—200 км и затем медленно возрастает до 500 и более.

Взаимоотношение волн различных типов

Как было показано выше, комплексные упругие константы для любого вида деформации элементарного объема могут быть выражены через две заданные константы с помощью обобщенного закона Гука. Если характер деформации меняется от точки к точке, требуется применить некоторый другой подход для оценки среднего поглощения через параметры среды. Например, согласно формуле (4.36) затухание рэлеевской волны на поверхности почти упругого полупространства зависит от θ_P и θ_S. Аналогично величина Q для каждой моды собственных колебаний почти упругой сферы может быть различной даже в том случае, когда материал, из которого сложена сфера, имеет только два независимых параметра поглощения. Величину Q для любого типа волны можно

получить, положив в основу вывода выражение для потенциальной энергии на единицу объема [95]

$$W_i = W_P + W_S,$$

где W_i соответствует величине PE в уравнении (2.52);

$$W_P = M(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz})^2/2,$$
$$W_S = \mu(e^2_{yz}+e^2_{zx}+e^2_{xy}-4e_{yy}e_{zz}-4e_{zz}e_{xx}-4e_{xx}e_{yy}). \quad (4.52)$$

Это соотношение применимо к каждому элементарному объему тела, вибрирующего на одной из собственных частот, помеченной индексом i. В случае стационарных колебаний на одной единственной частоте деформации e_{xx} и др. представляют собой амплитуды синусоид. Суммирование пиковой потенциальной энергии дает

$$\overline{W}_i = \frac{1}{V}\int W_i\,dV.$$

Для каждого элементарного объема

$$\Delta W_P = W_P 2\pi\theta_P,$$
$$\Delta W_S = W_S 2\pi\theta_S. \quad (4.53)$$

После усреднения по всему объему тела

$$\Delta\overline{W}_i = \Delta\overline{W}_P + \Delta\overline{W}_S,$$
$$\frac{\Delta\overline{W}_i}{\overline{W}_i} = \frac{\overline{W}_P\,2\pi\theta_P + \overline{W}_S\,2\pi\theta_S}{\overline{W}_P + \overline{W}_S}. \quad (4.54)$$

А так как $\Delta W/W_i = 2\pi\theta_i$, то

$$\theta_i = m_i\theta_P + (1-m_i)\theta_S, \quad (4.55)$$

где $m_i = (\overline{W}_P/\overline{W}_S)$.

В качестве примера применим рассмотренный способ расчета к колебаниям тонкого стержня (или к изгибу тонкой пластины). Предположим, что каждый элементарный объем подвергается растяжению в направлении оси z и что нормальные напряжения P_{xx} и P_{yy} равны нулю. Тогда

$$e_{xx} = e_{yy} = -e_{zz}\,(M-2\mu)/2(M-\mu),$$
$$e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0. \quad (4.56)$$

Согласно первой из формул (4.52)

$$(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}) = e_{zz}\mu)/(M-\mu),$$
$$W_P = e^2_{zz}M\mu^2/2(M-\mu)^2, \quad (4.57)$$

а согласно второй из формул (4.52)

$$W_S = e^2_{zz}\mu\,(M-2\mu)\;(3M-2\mu)/2(M-\mu)^2. \quad (4.58)$$

Усредняя по объему и упрощая аналогично (4.55), получим

$$\theta_Y = m_Y\theta_P + (1-m_Y)\theta_S,$$
$$m_Y = M\mu/(M-\mu)\;(3M-4\mu). \quad (4.59)$$

Выражения $\overline{W}_P$ и $\overline{W}_S$ были получены для всех основных мод колебаний изотропной сферы, что позволило связать измеренную добротность Q с θ_P и θ_S.

Определение упругих констант и параметров поглощения по измерениям на сфере требует применения соответствующих программ для вычисления энергетических характеристик и собственных частот на ЭВМ.

МЕХАНИЗМЫ ПОГЛОЩЕНИЯ

Как указывалось выше, ни один механизм поглощения не может претендовать на описание потери энергии во всех породах при любых встречающихся в глубинах Земли условиях. Многие из предложенных механизмов возможно действуют одновременно. Кажется разумным дать краткое описание основных механизмов, указывая их относительный вклад в поглощение.

Проскальзывание на контактах

Экспериментальные данные о независимости диаграммы напряжение — деформация от скорости деформации свидетельствуют о кулоновском трении. Горизонтальная сила T, действующая на скользящий по плоской поверхности брусок, пропорциональна нормальной силе N и коэффициенту трения K_d: $T = K_d N$. Направление силы зависит от направления относительной скорости смещения, но не от ее амплитуды или смещения. Если бы брусок колебался, кривая зависимости смещения от силы состояла бы из прямоугольных гистерезисных петель, независящих от частоты колебаний. В любой среде, в которой сейсмические волны вызывают проскальзывание контактирующих поверхностей, диаграмма напряжение — деформация должна представлять собой замкнутую кривую, независящую от скорости деформации.

Миндлин и его сотрудники [42, 105] попытались объяснить влияние сухого трения на связь сил и смещений для сферической упаковки и вместе с Джонсоном [76] сравнили эти соотношения с экспериментальными данными на стальных и стеклянных сферах. Свойства сферической упаковки, рассмотренные в разделе «Модель сферической упаковки для зернистых пород», могут служить отправной точкой. В частности, рассмотрим пару сфер (см. рис. 3.6, *б*), прижатых друг к другу силой G и контактирующих по кругу радиуса b. Нормальные напряжения определяют по формуле

$$p_N = -\frac{3G}{2\pi b^2}\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)^{1/2}. \qquad (4.60)$$

При наличии касательной силы $\Delta G'$, показанной на рис. 3.8, *а*, в области контакта возникает касательное напряжение p_T. Основное предположение состоит в том, что действующие на поверхности контакта нормальные и касательные напряжения подчиняются законам кулоновского трения, а именно: в каждой точке, где не наблюдается проскальзывание, величина p_T должна быть меньше $K_d p_N$, а там, где имеется проскальзывание, $p_T = K_d p_N$ с соответствующим знаком. Если движение останавливается при максималь-

ном значении касательной силы $\Delta G'$, то касательное напряжение $K_d p_N$ имеется во всех тех зазорах между сферами, в которых происходило проскальзывание, а его знак зависит от предшествующего относительного движения. Если касательная сила начнет уменьшаться, то в проскальзывание будет вовлечена новая порция контактов, в пределах которых $p_T = -K_d p_N$. Следовательно, изменение касательного напряжения между стадиями роста нагружения и разгрузки составляет $-2K_d p_N$. Если сила уменьшается до $-\Delta G'$ и затем увеличивается снова до $\Delta G'$ диаграмма сила — смещение будет представлять гистерезисную петлю, площадь которой характеризует потерю энергии за период. Остальная потеря энергии за период, характеризующая поперечные волны, распространяющиеся вдоль оси кубической решетки сфер,

$$\left(\frac{\Delta W}{W}\right)_S - \frac{4}{9}\frac{\Delta G'}{K_d G}. \tag{4.61}$$

С учетом формулы (4.30) получаем, что коэффициент поглощения пропорционален частоте. Однако поглощение также пропорционально амплитуде и должно быть пренебрежимо мало для деформаций, характерных для сейсмических волн. Следовательно, сухое трение не может рассматриваться как существенная причина поглощения. Эксперименты на прижатых друг к другу сферах подтверждают наличие кольцевых поверхностей скольжения [105] и гистерезисную форму кривых. В этих экспериментах использовались большие касательные силы, вызывающие сильные деформации, при этом относительная потеря энергии за один период оказалась независящей от амплитуды.

Поглощение сейсмических волн, вызванное трением, рассматривалось также для случая скольжения поверхностей эллиптических трещин, сдавленных нормальным напряжением, действующим до приложения касательных сил [172]. Касательные напряжения, возникающие при распространении сейсмических волн, вызывают проскальзывание. Эта модель согласуется с данными измерений, согласно которым предварительное напряжение уменьшает поглощение. Поглощение в этом случае не зависит от амплитуды, но зависит от размера и ориентации трещин, а также от их числа в единице объема.

Общий анализ кулоновского трения показывает, что скольжение по поверхностям трещин и контакта зерен обусловливает поглощение прямо пропорциональное амплитуде деформации [100] в согласии с данным выше анализом контактирующих сфер. Измерения остроты резонанса стержней из песчаника [193] дают значения Q, независящие от амплитуды для деформаций, меньших, чем 10^{-6}. Величина Q^{-1} резко возрастает при увеличении деформаций. Диаграмма напряжения — деформация в экспериментах по кручению стержней из песчаника [24] является эллипсоидальной при деформациях ниже 10^{-6}, а при увеличении этого значения быстро изменяет свою форму. Отсюда сделан вывод, что хотя трение сколь-

жения может вносить некоторый вклад при деформациях выше 10^{-6}, этот механизм не может быть ответственным за наблюдаемые не зависящие от частоты значения Q при меньших деформациях.

Движение флюида в порах

В литературе большое внимание уделялось модели, в которой поглощение сейсмических волн вызывается относительным движением твердого скелета и вязкой жидкости, заполняющей поровое пространство. Теория Био охватывает эту ситуацию в случае, когда поровое пространство заполнено флюидом одного типа. В других работах исследовались случаи насыщения породы двумя флюидами или больше.

Для типичных водонасыщенных пород приближение теории Био в низкочастотной области применимо для решения задач сейсморазведки и сейсмологии. Поэтому полезно отметить, что вытекающие из уравнений (4.40) выражения для фазовой скорости и коэффициента поглощения относительно просты:

$$c_P = \left(\frac{M}{\rho}\right)^{1/2},$$

$$a_P = \frac{2\pi^2}{c_P}\,\frac{\rho_f}{\rho}\,\frac{\varkappa\rho_f}{\eta}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_f}\,\frac{k_s}{M}\,\frac{1 - \bar{k}/k_s}{1 - \Phi + \Phi k_s/k_f - \bar{k}/k_s}\right)^2 f^2. \quad (4.62)$$

Приведем также соответствующие выражения для поперечных волн:

$$c_S = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2},$$

$$a_S = \frac{2\pi^2}{c_S}\,\frac{\rho_f}{\rho}\,\frac{\varkappa\rho_f}{\eta}\,f^2. \quad (4.63)$$

По этим формулам получены следующие значения коэффициентов поглощения для типичного водонасыщенного песчаника [179]: $a_P = 9\cdot 10^{-12} f^2$ с^2/см; $c_S = 65\cdot 10^{-12} f^2$ с^2/см. Для частот ниже 100 Гц эти значения значительно меньше тех, которые наблюдаются в экспериментах. Поэтому отсюда следует вывод, что потери энергии, вызванные вязкостью флюида, пренебрежимо малы.

Значения скоростей точно совпадают со значениями, определяемыми формулой (3.31), которая была выведена в предположении об отсутствии относительного движения между скелетом и жидкостью. Выражения для коэффициентов поглощения в формулах (4.62) и (4.63) также могут быть получены при условии, что относительное смещение между жидкостью и скелетом мало по сравнению с общим смещением, и что оно (относительное смещение) обусловливает поток флюида, подчиняющийся закону Дарси. Этот простой вывод дает непосредственное описание механизма поглощения, который может быть не столь очевиден в общей теории. Поглощение поперечных волн связывается с предположением, что движущийся твердый скелет увлекает флюид благодаря

вязкости последнего, и поскольку поперечные волны не сопровождаются изменением давления, то силы вязкости полностью ответственны за ускорение флюида. Если смещение скелета в плоской поперечной волне есть $u_y = U_y \cos\omega(t - x/c_S)$, то вызывающая ускорение сила на единицу объема $\rho_f \partial^2 u_y/\partial t^2 = \rho_f \omega^2 U_y \cos\omega(t - x/c_S)$ и должна совпадать с градиентом давления, вызванного потоком флюида. Если относительная скорость перемещения флюида равна v, то градиент давления, вызывающий поток флюида через пористую среду $\partial p/\partial y = -(\eta/\varkappa)v$. Следовательно, $v = (\varkappa\rho_f/\eta)\omega^2 \times \times U_y \cos\omega(t - x/c_S)$. Потерю энергии за период в единичном объеме породы определяют по формуле

$$\Delta W = -\int_0^{2\pi/\omega} \frac{\partial p}{\partial y} v\,dt = \frac{\pi\rho_f^2\omega^3\varkappa U_y^2}{\eta}.$$

Максимальная запасенная энергия равна $\rho\omega^2 U_y/2$, поэтому

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\Delta W}{W}\right)_S &= \frac{\rho_f}{\rho}\frac{\rho_f\varkappa}{\eta}2\pi\omega, \\ a_S &= \frac{\omega}{2c_S}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\Delta W}{W}\right)_S = \frac{2\pi^2}{c_S}\frac{\rho_f}{\rho}\frac{\rho_f\varkappa}{\eta}f^2. \end{aligned}\right\} \tag{4.64}$$

Поскольку этот параметр поглощения совпадает с полученным из самых общих предположений, то становится ясным, что ускорение флюида, вызываемое его вязким взаимодействием со скелетом, является единственным важным механизмом, обусловливающим поглощение поперечных волн в низкочастотной области. Так как выражение (4.62) для a_P содержит те же самые характеристики среды, то указанный механизм является существенным и для продольных волн. Другое слагаемое, содержащееся в выражении для a_P, может быть получено, если вычислить давление во флюиде, вызванное изменением элементарного объема при отсутствии относительного движения, а затем использовать этот градиент для вычисления малого относительного смещения согласно закону Дарси. Оба слагаемых в (4.62) имеют противоположные знаки, поэтому поглощение продольных волн на одну длину волны меньше поглощения поперечных волн. Фактически, затухание продольных волн исчезает, когда градиент давления достаточно велик, чтобы вызвать такое же смещение флюида, какое испытывает твердый скелет.

Учитываемый в рамках низкочастотного приближения теории Био градиент давления может оказаться очень большим вблизи границы жидкость — газ, вызвав аномально большое движение жидкости (см. раздел «Волны в тонкослоистых пористых средах»). В ситуации, когда большой объем водонасыщенной породы содержит изолированные области газового насыщения, поглощение низкочастотных волн может оказаться аномально высоким. Высокое затухание волн в толще над газовыми залежами может быть объ-

яснено наличием «газовых карманов», появившихся благодаря вертикальной миграции углеводородов из резервуара [202]. Имеются также данные об отсутствии отражений от мелководных морских осадков, содержащих пузырьки газа.

Ряд исследователей анализировали потери энергии, обязанные колебаниям жидкости в индивидуальных порах, которые, наряду с жидкостью, содержат газ [100, 114]. На рис. 4.24, *а* показано, как вода смачивает зерна вблизи областей контакта при частичном водном насыщении. При воздействии продольной волны зерна сближаются, заставляя жидкость течь в направлении к свободной границе газового пузыря. Были оценены соответствующие вязкие

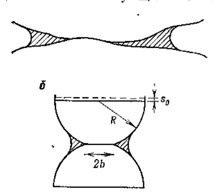


Рис 4 24 Общая схема контакта между двумя зернами в неконсолидированном песке (вода существует в капилярных кольцах, показанных штриховкой) (*а*) и две сферы, сжатые при предварительном нагружении на величину s_0 и контактирующие на площади радиуса *b* (радиус кольца жидкости отвечает 20 %-ному насыщению флюидом) (*б*) [114]

потери в долях упругой энергии скелета и найдены характеристики поглощения. На низких частотах поглощение пропорционально квадрату частоты. Поглощение зависит от геометрии трещин и пустот, при этом тончайшие трещины вносят непропорционально большой вклад. Палмер и Траволна [114] рассчитали поглощение для простой кубической упаковки шаров, частично заполненной смачивающим флюидом (рис. 4.24, *б*), которое оказалось пренебрежимо малым на частотах, меньших 1 кГц.

Термоупругие эффекты

При распространении сейсмических волн через однородную среду возникают температурные флуктуации, пропорциональные дилатационной части деформаций. Константа пропорциональности варьирует в прямой зависимости от коэффициента теплового расширения, модуля всестороннего сжатия и плотности. На фиксированной частоте максимум и минимум температуры в однородной среде находятся на расстоянии половины длины волны, поэтому температурный градиент оказывается столь малым, что энергией, затрачиваемой на тепловой поток, можно пренебречь. Одномерный тепловой поток на данной частоте уменьшается в 1/e раз на расстоянии, называемом эффективной глубиной, которое зависит от

отношения теплопроводности и теплоемкости. Эффективная глубина, характеризующая горные породы, намного меньше длины сейсмических волн. Но в малом объеме горные породы, как правило, не являются однородными в связи с наличием пустот и минеральных агрегатов. Поэтому при распространении сейсмических волн дилатационная составляющая деформаций в этом объеме является неоднородной и, следовательно, температурные различия могут наблюдаться между точками, расстояние между которыми меньше эффективной глубины. Частичное выравнивание температур в течение каждого периода может поглощать значительную долю энергии сейсмической волны в зависимости от конкретной природы неоднородности. Этот механизм математически исследовался рядом авторов для частных предположений о конкретной геометрии. На основе данных Сэвэйджа [137], который изучал пустоты, моделируемые эллиптическими цилиндрами, сделаем несколько замечаний относительно сред, содержащих изолированные сферические полости.

Если касательное напряжение в поперечной волне действует на малую сферическую полость, то сфера растягивается в одном направлении и сжимается в перпендикулярном направлении. Вследствие этого пространство вблизи сферы разделяется на квадранты с чередующимся сжатием и растяжением, поэтому температурный градиент возникает на расстояниях, примерно равных радиусу сферы. Поглощаемая тепловым потоком энергия на единицу объема характеризуется параметром θ_S, который приближенно пропорционален пористости. Как функция частоты, этот параметр имеет широкий максимум, если эффективная глубина примерно равна половине радиуса сферы. Для кварца, например, максимальное поглощение наблюдается при 100 Гц, если радиус сфер равен нескольким десяткам миллиметра. Удивительно, что в случае чистого сжатия пород, содержащих сферические полосы, каких-либо потерь энергии из-за температурного градиента не наблюдается, следовательно, объемный модуль (модуль всестороннего сжатия) $\bar{K}$ пористых сред является чисто упругим. Поглощение продольных волн полностью обязано неидеальной упругости модуля сдвига. Как было установлено, отношение θ_P/θ_S зависит только от коэффициента Пуассона ν для упругой среды и $\bar{\nu}$ для пористой среды. В любом случае параметры θ_P и θ_S прямо пропорциональны абсолютной температуре.

Сэвэйдж получил также выражение поглощения в случае длинных и тонких трещин. Им был сделан вывод, что в случае трещин, ширина которых примерно равна 0,1 мм, значения θ_S и θ_P близки к измеренным для сухого гранита при очень малой зависимости от частоты в диапазоне от 20 до $2 \cdot 10^5$ Гц. Теоретическая оценка отношения θ_P и θ_S была также вполне приемлемой. Указанная выше прямая зависимость θ_P и θ_S от абсолютной температуры оказалась плохо согласующейся с экспериментальными данными. В более поздней работе [7] развивается тезис, согласно которому параметры θ_P и θ_S не зависят от частоты, если среда яв-

ляется однородной на расстоянии одной длины сейсмической волны, содержит микроскопические неоднородности, характерные размеры которых варьируют от малых до больших по сравнению с эффективной глубиной.

Несовершенство кристаллической решетки

Как известно, несовершенство упорядоченного расположения атомов в поликристаллических металлах и минералах оказывает влияние на скорость и поглощение акустических волн в этих материалах. Поскольку многие породы состоят из зерен, которые имеют очевидную кристаллическую структуру или, по крайней мере, химическое строение которых предполагает упорядоченность атомов, можно ожидать, что такие же эффекты могут проявляться и при распространении сейсмических волн. Полный обзор исследования по этому вопросу и обсуждение наиболее важных идей было дано Мэйсоном (1976 г.). Главная идея заключается в том, что напряжения могут изменять положение дефектов в кристаллической решетке. Это изменяет связь деформации с напряжением в среде, увеличивая значения упругих модулей и добавляя к ним мнимую часть. Чтобы изменить положение дефекта, требуются как тепловая энергия, так и механическое напряжение. Тепловая энергия затрачивается на преодоление энергетического барьера, который смещается под воздействием напряжений. Согласно Мэйсону дефектом, который наиболее сильно влияет на скорость и поглощение волн, является дислокация, представляющая линейную область нарушенного порядка, удерживаемая на обоих концах некоторыми дефектными атомами. В одном случае сейсмические волны заставляют дислокацию колебаться подобно растянутой струне, излучая энергию при взаимодействии с тепловыми фононами. Это явление обусловливает широкий максимум поглощения в мегагерцовом диапазоне частот. Более вероятно, что дислокации пересекают энергетический барьер и только частично находятся в области минимума потенциальной энергии. Каждая дислокация может содержать некоторое число узлов, при этом движение дислокации происходит в том случае, когда все узлы переходят через потенциальный барьер в соответствии с приложенным напряжением. Этот механизм ведет к независимости Q от частоты. Оба механизма дают значения Q, находящиеся в хорошем согласии с экспериментами на гранитах формации Уистерли и других породах, если использовать некоторые правдоподобные предположения о размере и плотности дислокаций. Результаты более поздних экспериментов [99] не удалось объяснить движением дислокаций в твердой фазе пород. В связи с этим была развита модель, базирующаяся на теории Герца для контактирующих сфер, в которой учитывается движение дислокаций на поверхности трещин. Искажения материала, наблюдаемые при деформациях, достигающих 10^{-4}, могут быть объяснены наличием дислокаций, отрывающихся от концевых дефектных атомов.

Большое внимание в литературе уделялось анализу необходимых соотношений между поглощением и фазовой скоростью в линейно неупругих средах. Предположение о линейном поведении среды в случае малых деформаций хорошо подтверждается многочисленными экспериментами даже в тех ситуациях, когда поглощение является совершенно очевидным. Поглощающая среда должна также подчиняться принципу причинности, исключающему появление отклика до начала действия источника. Условие причинности в применение к линейной среде обусловливает связь поглощения и дисперсии волн, рассматривавшуюся многими исследователями.

Принцип причинности

Для определенности рассмотрим плоскую продольную волну, распространяющуюся вдоль оси x:

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U_x(0,\omega)\, e^{-a_P x}\, e^{-i\omega x/c_P}\, e^{i\omega t}\, d\omega. \qquad (4.65)$$

В этой формуле как a_P, так и c_P являются функциями частоты ω. Согласно условию причинности необходимо потребовать, чтобы ω/c_P было суммой линейного члена и преобразования Гильберта от a_P [151], т. е.

$$\frac{\omega}{c_P(\omega)} - \frac{\omega}{c} + [a_P(\omega)]_{\pi/2}. \qquad (4.66)$$

В этом выражении, называемом дисперсионным соотношением, есть константа, которая не зависит от $a_P(\omega)$ и может быть проинтерпретирована как фазовая скорость на некоторой фиксированной частоте, в частности в качестве таковой может быть взята и бесконечная частота. Формула (4.66) указывает на способ вычисления дисперсии фазовых скоростей в тех случаях, когда зависимость поглощения от частоты известна по данным эксперимента.

Линейная зависимость поглощения от частоты на конечном интервале

Футтерман [54] получил формулу для фазовой скорости в предположении, что выше некоторой частоты ω_0 поглощение линейно зависит от частоты. Ниже частоты ω_0 поглощение отсутствует:

$$a_P = b|\omega| \text{ при } |\omega| > \omega_0,$$
$$a_P = 0 \text{ при } |\omega| < \omega_0. \qquad (4.67)$$

Предполагается, что доступные измерению частоты находятся выше ω_0. Фазовую скорость определяют по формуле

$$\frac{1}{c_P(\omega)} = \frac{1}{c_P(0)} - \frac{b}{\pi}\ln\left|\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right|. \qquad (4.68)$$

Константа $c_P(0)$ характеризует фазовую скорость при $\omega \to 0$. Но поскольку эту формулу предполагается использовать на частотах выше ω_0, константа c_P должна быть выбрана так, чтобы обеспечить совпадение $c_P(\omega)$ с фазовыми скоростями в этом частотном диапазоне. Эта связь поглощения с фазовой скоростью использовалась для описания экспериментальных данных при контролируемых условиях [196]. Это выражение было использовано для составления программ вычисления многократных внутрипластовых отражений в слоистой среде.

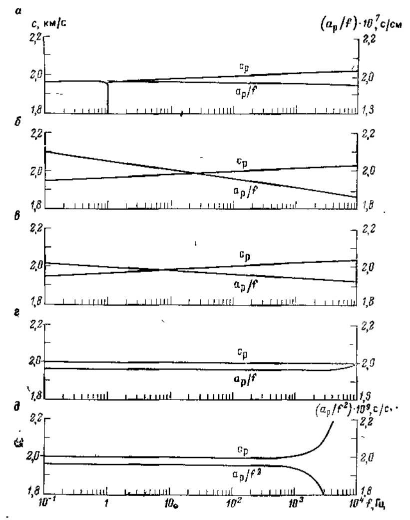


Рис. 4.25. **Зависимости поглощения и скорости от частоты для пяти моделей**
а — усеченный линейный закон; *б* — степенной закон, *в* — модель Кяртансона; *г* — система поглощающих пружинок, *д* — тело Фойгта

Однако при $\omega=\omega_0$ фазовая скорость, согласно формуле (4.68) обращается в нуль, что трудно признать реалистичным. Приведенное дисперсионное соотношение позволяет аппроксимировать экспериментальные данные в некотором ограниченном диапазоне частот, но не обеспечивает удовлетворительного описания на низких частотах. Поглощение и затухание для некоторой гипотетической породы с параметрами $\omega_0=2\pi$ с$^{-1}$, $b=3{,}12\cdot10^{-8}$ с/см и $c_P(0)=1960$ м/с показаны на рис. 4.25,*а*. Выбранные параметры соответствуют данным на частоте 100 Гц для сланцев формации Пиерре (см. рис. 4.1).

Степенной закон

Другое предположение состоит в том, что поглощение изменяется как дробная степень частоты во всем частотном диапазоне [24, 83, 150, 151]

$$a_P(\omega)=B\,|\omega|^s,\quad (0<s<1),$$
$$\frac{1}{c_P(\omega)}-\frac{1}{c_P(\infty)}+B\,\mathrm{tg}\left(\frac{s\pi}{2}\right)|\omega|^{s-1}. \qquad (4.69)$$

Так как $Q_P=|\omega|/2a_P(\omega)c_P(\omega)$, то величина Q_P постоянна, если $c_P(\infty)$ бесконечна, и приближенно постоянна при любом конечном $c_P(\infty)$, когда s близко к единице. Эти соотношения нанесены на рис. 4.25,*б* для $s=0{,}99$, $B=3{,}33\cdot10^{-8}$ и $c_P(\infty)=3320$ м/с. При $s\to1$ фазовая скорость может быть записана так:

$$\frac{1}{c_P(\omega)}=\frac{1}{c_P(\omega_0)}-\frac{1}{\pi Q_P\,c_P(\omega_0)}\ln\left|\frac{\omega}{\omega_0}\right|. \qquad (4.70)$$

Это дисперсионное соотношение было получено Кольским [86] для поглощения, изменяющегося по линейному закону. Он показал, что изменение формы сигнала при распространении вдоль тонкого стержня из пластика можно объяснить соотношением (4.70).

Кяртанесон [83] проводил исследования с других позиций, хотя результат оказался тем же самым. Определим пропорциональность между напряжениями и деформациями в частотной области следующим образом:

$$P_{xx}-M_0(i\omega/\omega_0)^{2\gamma}E_{xx}=M_0\left|\frac{\omega}{\omega_0}\right|^{2\gamma}e^{i\pi\gamma\,\mathrm{sgn}\,\omega}E_{xx}. \qquad (4.71)$$

Фазовый угол между напряжением и деформацией равен $\pi\gamma$. Определяя величину Q как отношение мнимой и вещественной частей упругого модуля, получим, что она не зависит от частоты:

$$Q^{-1}=\mathrm{tg}\,\pi\gamma. \qquad (4.72)$$

Однако величина упругого модуля медленно варьирует при изменении частоты, так что фазовая скорость также будет изменять-

ся. Соответствующее дисперсионное отношение эквивалентно соотношению (4.69):

$$\left.\begin{aligned} a_P(\omega) &= \frac{|\omega_0|\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\gamma}{2}}{c_0}\left|\frac{\omega}{\omega_0}\right|^{1-\gamma}, \\ c_P(\omega) &= c_0\left|\frac{\omega}{\omega_0}\right|^{\gamma}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.73)$$

Эти функции нанесены на рис. 4.25,*в* для параметров $\omega_0 = 200\pi$ с$^{-1}$, $c_0 = 2000$ м/с, $\gamma = 0{,}00397$.

Дискретная почти упругая среда

Другое предположение состоит в том, что среду можно представить в виде системы элементарных масс, соединенных поглощающими пружинами [190]. Если сжатие или растяжение пружин сопровождается вязким трением, то данная дискретная модель приближается к модели Фойгта по мере того, как уменьшаются размеры элементарных масс. Другой тип пружин определяется в частотной области: сила $F(\omega)$ пропорциональна смещению $D(\omega)$ с частотно-независимой комплексной константой пропорциональности

$$F(\omega) = (K + i\,\mathrm{sgn}\,\omega P)\,D(\omega). \qquad (4.74)$$

Если считать, что поглощающая пружина характеризует поведение куба со стороной L из почти упругого материала, подчиняющегося уравнению (4.19), то $K = ML$ и $P = M^*L$. Масса куба $m = \rho L^3$. В результате анализа дискретной почти упругой среды можно получить следующие дисперсионные соотношения:

$$e^{a_P L + i\omega L/c_P} = 1 + q + [2q + q^2]^{1/2}, \qquad (4.75)$$

где

$$2q = -(\omega^2/\omega_0^2)\cos\theta_P\, e^{-i\,\mathrm{sgn}\,\omega\theta_P};$$
$$\theta_P = \mathrm{arctg}\,(P/K);$$
$$\omega_0 = [K/M]^{1/2}.$$

Поглощение и фазовая скорость отображены на рис. 4.25,*г* для $K = 8{,}4\cdot10^{10}$ дин/см, $P = 1{,}05\cdot10^{9}$ дин/см, $m = 2{,}1$ г, $L = 1{,}0$ см. Из рисунка видно, что дисперсия скорости практически отсутствует, а отношение поглощения к частоте практически постоянно. В этом случае $\omega_0 \approx 70\pi$ с$^{-1}$. На частотах выше 35 кГц c_P возрастает линейно с частотой, а a_P увеличивается до очень больших значений. Авторы [190] пришли к выводу, что поведение модели на высоких частотах и недисперсионный характер распространения волн на низких частотах обеспечивают выполнение принципа причинности. Этот вывод базировался на том, что вещественная составляющая правой части соотношения (4.75) $e^{-a_P L}\cos(\omega L/c_P)$ является преобразованием Гильберта мнимой части $e^{-a_P L}\sin(\omega L/c_P)$ [см. формулы (4.12)].

Из приведенных данных видно, какое огромное внимание было уделено изучению поглощения и дисперсии сейсмических волн. Параметры поглощения волн в горных породах измерялись с помощью разнообразных методик в широком диапазоне частот и условий. Было предложено большое число моделей поглощения, которые исследовались с различной степенью математической строгости. Условие причинности, будучи примененным к распространению волн в линейно-неупругих средах, порождает дисперсионные соотношения, которые позволяют аппроксимировать экспериментальные данные в разумных пределах. Однако до сих пор нет общей концепции относительно доминирующего механизма поглощения или предпочтительного дисперсионного соотношения. Много вопросов остаются не решенными.

Основным препятствием служит широкий спектр свойств, которыми обладают горные породы. Выводы, полученные для нефтесодержащих коллекторов, могут оказаться неприменимыми к веществу верхней мантии.

Одним из источников неопределенности является недостаточное согласие данных, полученных разными исследователями, для одного и того же типа измерений. Например, тщательные сравнения скоростей, полученных по данным акустического и обычного сейсмокаротажа, одних авторов привели к заключению о хорошем соответствии результатов обоих видов каротажа [111], а других к систематическому (на несколько процентов) завышению скорости по акустическому каротажу.

Если один из исследователей демонстрировал сейсмический разрез, на котором амплитуда отражений увеличивается при введении поправок за дисперсию волн [132], то другие не находят никаких свидетельств в пользу дисперсии при сравнении синтетических и полевых сейсмограмм, хотя расширение импульса вследствие поглощения существенное. Эта неопределенность становится особенно очевидной, когда два исследователя во многом расходятся относительно одного и того же набора данных. В частности, исследователи, анализировавшие сейсмограммы, полученные для сланцев формации Пиерре, сделали вывод об отсутствии дисперсии в частотном диапазоне 50—500 Гц [102], но Вуеншел [197] показал, что наблюдающиеся изменения импульса от расстояния аппроксимируются лучше при учете дисперсии согласно усеченному линейному закону. Еще раньше сейсмограммы, зарегистрированные в тех же сланцах, интерпретировались в пользу поглощения, пропорционального квадрату частоты [127], тогда как переинтерпретация этих же сейсмограмм показала, что поглощение пропорционально первой степени частоты [83].

Экспериментаторы, изучающие физические свойства горных пород, предприняли немало усилий, направленных на контроль и описание условий, при которых проводятся измерения. В большинстве случаев сами результаты не подвергаются сомнению. Но

в том случае, когда изучается поведение пород в условиях их естественного залегания, возникает много вопросов. Достаточно ли велик образец, чтобы быть представительным? В какой мере результаты не зависят от геометрии образца? Достаточно ли мала деформация? Являются ли типичными температура, давление, и флюидонасыщение? Читатель всегда должен иметь эти вопросы в виду. Например, опубликованные измерения поглощения на высушенных образцах должны рассматриваться как неопределенные в той мере, в какой небольшое количество воды способно резко уменьшить величину Q разгазированных пород [159]. Во многих случаях уровень деформации не фиксируется, хотя четко установлено, что поглощение зависит от деформации. Во многих работах публикуются измерения на тонких флюидонасыщенных стержнях, по которым вычисляются скорость и поглощение продольных и поперечных волн без использования теории Био, позволяющей скорректировать данные за размер стержня и свойства флюида [145].

Несмотря на все эти вопросы и неопределенности, ряд характеристик поглощения и дисперсии волн могут считаться надежно установленными. Для различных типов пород и для широкого диапазона условий данные свидетельствуют о постоянстве величины Q или, что то же самое, пропорциональности коэффициента поглощения первой степени частоты как для продольных, так и поперечных волн. Наблюдавшиеся во многих экспериментах малые изменения упругих констант и значений скорости находятся в хорошем соответствии с измерениями поглощения и требованиями причинности. Установлено уменьшение поглощения и увеличение скоростей при больших давлениях. Образцы тщательно разгазированных пород показывают экстремально высокие значения Q, тогда как малые добавки воды вызывают резкое уменьшение Q. В полностью насыщенных породах макроскопический поток оказывает влияние на поглощение волн и их дисперсию в согласии с теорией Био. Поглощение и дисперсия независимы от амплитуды деформации при деформациях меньших 10^{-5} или 10^{-6}, тогда как при больших деформациях наблюдается четко выраженное нелинейное поведение вещества.

ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СКВАЖИНАХ

ТЕХНИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В СКВАЖИНАХ

Волны, распространяющиеся вдоль заполненных жидкостью скважин, давно применялись в сейсмических исследованиях с целью разведки залежей руд и нефти. Как писал Бартон [10], впервые искусственно возбуждаемые упругие волны были использованы для определения локальной геологической структуры Фессенденом [50], который в 1913 г. выполнил полевые эксперименты и усовершенствовал аппаратуру, предназначенную для определения местоположения неглубоко залегающих рудных тел. Звуковой датчик, погруженный в скважину с водой, возбуждал контролируемые импульсы давления и, следовательно, генерировал упругие волны в окружающей земле; акустические приемники, погруженные в воду в других скважинах, были соединены с записывающей аппаратурой. Отражение, преломление и поглощение волн давали возможность сделать выводы о структуре среды между скважинами. Бартон предположил также, что любое существенное отклонение нефтяной скважины от вертикали может быть отмечено путем фиксирования вариаций во временах пробега между приемником, помещенным глубоко в скважине, и взрывными источниками, помещенными на определенных расстояниях от устья скважины в разных направлениях. Мак-Коллэм и Леру [101] указали на то, что времена прохождения волны между отдаленным взрывом и приемником в исследуемой скважине могут дать информацию о расположении сбросов и геометрии соляных куполов. Регистрация времен прохождения волны между поверхностными взрывами и скважинным приемником на разных глубинах была запатентована в качестве метода разведки Неттлетоном [110], а Дикс [39] предложил усовершенствованный метод для определения вариаций сейсмической скорости с глубиной по скважинным данным.

Примерно 30 лет назад стала разрабатываться аппаратура, измеряющая скорость распространения продольных волн в породе вокруг скважины, непрерывно изменяющаяся с глубиной. В аппаратуре, описанной Саммерсом и Броудингом [152], а также Фогелем [169] источник генерирует импульс давления во флюиде, а приемник, чувствительный к давлению и расположенный на расстоянии 1 м от источника, показывает время вступления первого акустического сигнала. Обычно сигнал, прибывающий первым, проходит через окружающую породу и, следовательно, время его прохождения является мерой скорости продольных волн в породе. Получаемые скоростные колонки очень важны при интерпретации

сейсмических записей с целью поисков нефти; они дают также возможность оценить свойства нефтеносных структур. Было установлено, что кроме скоростей продольных волн в полном волновом поле, регистрируемом таким типом скважинной аппаратуры, содержится много дополнительной информации, например скорость поперечных волн в породе или наличие разломов, пересекающих скважину [113]. Далее, были сконструированы разные виды акустической аппаратуры, показавшей новые возможности. В одном из таких видов, рассчитанном на поперечные волны, используются горизонтальные вибратор и приемник, расположенные в скважине с флюидом [89]. В аппаратуре, предназначенной для обнаружения вертикальных сбросов, кристаллические источники и приемники, прижатые к стенке скважины, генерируют и фиксируют прямые волны, которые проходят вблизи скважины [170]. Еще в одном виде аппаратуры, названном «скважинным телевизором», вращающийся кристаллический источник направляет импульс акустической энергии к стенке скважины, и кривая коэффициента отражения показывает сбросы и другие детали разреза [201].

Большое внимание уделялось возможности использования глубоких скважин при размещении сейсмографов для регистрации землетрясений и обнаружения ядерных взрывов [25]. На больших расстояниях от поверхности Земли снижается уровень ветровых и индустриальных помех, что повышает эффективность приема полезных колебаний [18, 51]. Но чтобы полностью использовать преимущество уменьшенного уровня шума, нужны ультрачувствительные скважинные сейсмографы.

Скважинная аппаратура может быть сконструирована таким образом, чтобы свести к минимуму эффекты самой скважины, поскольку при регистрации непосредственно используются звуковые волны, распространяющиеся в скважинах, заполненных флюидом; очень важно знать законы распространения волн в скважинах, чтобы правильно интерпретировать получаемые результаты. В главе данная проблема будет рассмотрена с трех разных сторон. В следующем разделе приводится обзор опубликованных экспериментальных данных, рассматриваются идентификация типов волн и качественная интерпретация основных явлений. Далее следует упрощенный анализ низкочастотных волн, проходящих в скважине, заполненной жидкостью, и низкочастотных сигналов, возбуждаемых в скважине при прохождении волн в окружающую среду.

НАБЛЮДАЕМЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛН В СКВАЖИНАХ

Уже много лет природа упругих волн, распространяющихся вокруг скважин в земле, является объектом интенсивных исследований, и данные становятся все более полными по мере усовершенствования аппаратуры и проведения более тонких экспериментов.

Хоуэлл и другие [71] опубликовали в 1940 г. результаты измерения скорости и затухания продольных волн в близповерхностных

породах в частотном диапазоне от 20 до 1400 Гц. Источники и детекторы давления в этих исследованиях располагались на разных глубинах в скважинах, заполненных водой. Хотя во многих случаях основной сигнал интерпретировался как прямая продольная волна, встречались ситуации, когда амплитуды изменялись так сильно, что вполне можно предположить наличие интерференции, на основе чего был сделан вывод о том, что в целом волновая картина весьма сложная.

Шарп [142] изучал волны от небольших взрывов в скважинах, заполненных водой. В ходе работы он наблюдал последующее вступление, которое он определил как трубную волну. Хортон [70] отметил четкое последующее вступление на трассах, получаемых приемниками, расположенными на глубинах до 2000 м, в результате взрыва зарядов в 13-метровой скважине на глубине 13 м и на расстоянии примерно 300 м от устья скважины. Он пришел к выводу, что это поперечная волна, возможно, является результатом обмена на границе раздела, расположенной сразу над взрывом. Эти первые экспериментальные данные свидетельствовали о том, что поперечная волна, проходящая вдоль скважины, будет создавать давления во флюиде скважины, способные вызвать движение приемника в аксиальном направлении. Проводя серию экспериментов, проводимых с целью измерения затухания в необычно однородном разрезе глин, Риккер [127] отметил во вторых вступлениях волну, которая интерферировала с первой. Ординг и Реддинг [112] опубликовали серию сейсмограмм, полученных в глубоких скважинах, которые показали некоторые особенности распространения волн в скважинах. В этих экспериментах заряды динамита взрывались в скважинах глубиной 25 м, расположенных на расстоянии 150 м от устья глубокой скважины. Три датчика давления, расположенные на расстояниях 31 м друг от друга, использовались для записи звуковых волн, проходящих в буровом растворе до глубин, превышающих 3700 м. Каждая скважина имела внешнюю обсадку до глубины 100 м, а внутренняя обсадка была сделана до глубины 1000 м; ниже, до забоя, скважина не обсаживалась. На всех глубинах наблюдался сигнал, вызванный прохождением прямой продольной волны. Когда приемники находились внутри обеих обсадных колонн, часто наблюдалось вступление волны, которая распространялась по стальной трубе. В обсаженной части скважин самые сильные волны проходили со скоростью около 1390 м/с. Одна такая волна генерировалась на нижнем конце внешней обсадной колонны при прохождении прямой продольной волны, а другая волна подобным же образом генерировалась нижним концом внутренней обсадной колонны. В необсаженной скважине основная волна, проходящая по направлению вверх со скоростью примерно 1400 м/с, генерировалась, когда прямая продольная волна достигала забоя скважины. Отсюда следует, что распространяющаяся по буровому раствору волна возникает, когда бегущая по породам продольная волна пересекает резкие границы раздела конструкции скважины. Риггс [128] наблюдал прямые продольные волны

и сильные последующие вступления, проходящие со скоростью примерно 1330 м/с, когда он проводил эксперименты с 20-ю датчиками давления из титаната бария, расположенными с интервалами 3 м друг от друга в скважинах глубиной около 100 м. Пример сейсмограммы показан на рис. 5.1.

Развитие аппаратуры акустического каротажа также обеспечило информацию о природе волн, распространяющихся в скважинах. Уже в первых публикациях по этому вопросу были раскрыты основные характеристики этого явления. Саммерс и Броудинг [152] описали титанато-бариевый источник, содержащий цепь для разряда конденсатора с частотой в несколько герц и титанато-ба-

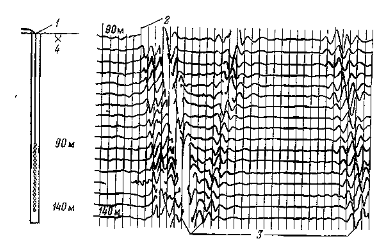


Рис. 5.1. Трубная волна и последующие вступления в обсаженной скважине [128]. *1* — обсаженная скважина; *2* — первые вступления; *3* — последующие вступления; *4* — заряд

риевый приемник, расположенный на расстоянии 1,65 м от источника. Все это было вмонтировано в зонд, способный погружаться глубоко в скважину. На осциллограмме, полученной с помощью такой аппаратуры, зарегистрирован сигнал, который распространяется главным образом в породе вокруг скважины, затем высокочастотная волна, которая, видимо, проходит со скоростью объемной продольной волны в буровом растворе, и трубная волна, которая проходит через столб бурового раствора со скоростью, уменьшенной влиянием стенки скважины. Фогель [169] использовал разряд конденсатора между двумя электродами в жидкости как источник и пьезоэлектрический приемник гидрофонного типа в аппаратуре, подобным же образом сконструированной для измерений в глубоких скважинах. Полученные им сейсмограммы показывают наиболее отчетливую продольную волну, проходящую по породе, очень высокочастотную водную волну и трубную волну. Он наблюдал, что известняковые формации обычно дают вступление

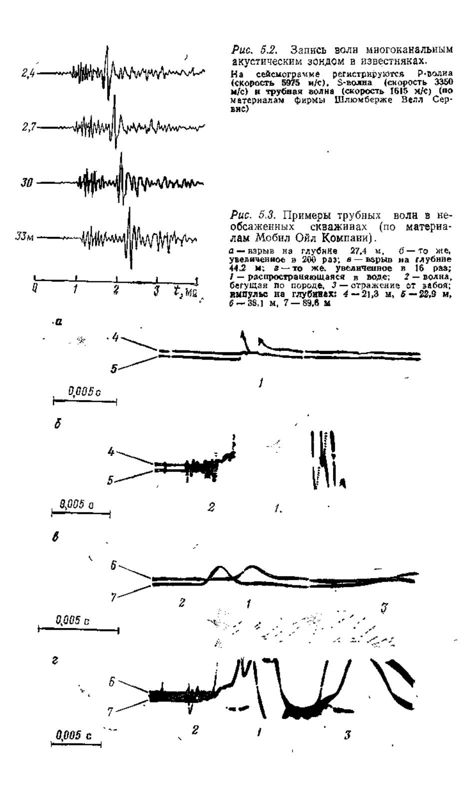


Рис. 5.2. Запись волн многоканальным акустическим зондом в известняках.

На сейсмограмме регистрируются Р-волна (скорость 5975 м/с), S-волна (скорость 3350 м/с) и трубная волна (скорость 1615 м/с) (по материалам фирмы Шлюмберже Велл Сервис)

Рис. 5.3. Примеры трубных волн в необсаженных скважинах (по материалам Мобил Ойл Компани).

а — взрыв на глубине 27,4 м, *б* — то же, увеличенное в 200 раз; *в* — взрыв на глубине 44,2 м; *г* — то же, увеличенное в 16 раз; *1* — распространяющаяся в воде; *2* — волна, бегущая по породе, *3* — отражение от забоя; импульс на глубинах: *4* — 21,3 м, *5* — 22,9 м, *6* — 38,1 м, *7* — 89,6 м

поперечной волны более сильное по сравнению с продольной волной. На рис. 5.2 воспроизведена записанная с помощью цифровой регистрации сейсмограмма, где четко видны продольная, поперечная и проходящая во флюиде волны.

В ряде исследований были сделаны попытки использовать трубные волны для получения информации о породах, залегающих вокруг скважин. Уайт и Сенгбаш [187] наблюдали на двух приемниках давления импульс, генерируемый во флюиде при взрыве детонатора, помещенного на большую глубину в ту же скважину (рис. 5.3). Учитывая скорость этого импульса и известные свойства флюида, можно рассчитать сдвиговую жесткость окружающей среды. Халевин и Барыкин [81] описали скважинную аппаратуру, состоящую из детектора давления и источника низкочастотных синусоидальных волн. Было отмечено существенное изменение амплитуды, но не сделан анализ связи этих изменений с характеристиками пород. Были выданы патенты на методы использования низкочастотных трубных волн для определения сдвиговой жесткости, измерения скоростей продольных волн с помощью сигнала, генерируемого в породах, а также патенты, в которых метод использования волн в скважинах описан недостаточно четко, чтобы понять, какую информацию о свойствах породы можно получить.

Преимущества измерения скоростей поперечных волн были выяснены довольно рано [180]. Тогда же было выдвинуто предложение об использовании крутильного и изгибного движения вдоль скважин. Как упоминалось ранее, эксперименты продемонстрировали эффективность вибрационного источника при возбуждении сильной поперечной волны с движением частиц перпендикулярно к оси скважины [82]. На рис. 5.4 показаны сигналы от пяти горизонтальных приемников (1x—5x), подвешенных в скважине, заполненной жидкостью с интервалом в 1 м на расстоянии от 3,2 до 7,2 м от источника. На нижней трассе показан сигнал от приемника, расположенного на расстоянии 5,2 м и ориентированного перпендикулярно к направлению силы. Эта аппаратура предназначена для исключения прямого распространения волны через столб бурового раствора. Понятно, что изгибная мода усиливает поперечную волну.

Некоторые исследователи предложили проводить эксперимент в скважинах таким образом, чтобы существенно снять влияние скважины и наблюдать истинное движение земли. Джолли [79], Левин и Линн [94] представили сейсмограммы, полученные с вертикальным приемником, прижатым к стенке скважины на глубинах в несколько тысяч метров. Отражения от нескольких горизонтов были прослежены до точки их возникновения и сопоставлены с обычными отражениями, полученными на поверхности. Е. И. Гальперин [55] описал многочисленные измерения этого типа и систематизировал соответствующие приемы интерпретации как метод «Вертикального сейсмического профилирования». Риккер [127], Мак-Донал и другие [102] в своих экспериментах применяли прижатые сейсмоприемники на несколько меньших глубинах и

изучали затухание сейсмических волн в сланцах Пиерра. Такого рода эксперименты накладывают строгие требования к эффективности прижимных устройств. Уайт [177] использовал выражения (которые будут приведены ниже), чтобы сравнить форму волн давления в скважине, заполненной жидкостью, с формой волны от прижатого приемника и пришел к выводу, что последний действительно воспроизводит движение земли на частотах ниже 100 Гц. Туллос, Рейд [163] и Джанак [75] цементировали приемники в скважинах, чтобы не использовать прижимные устройства.

В результате всех этих наблюдений в самых разнообразных условиях можно сделать ряд заключений, касающихся распростра-

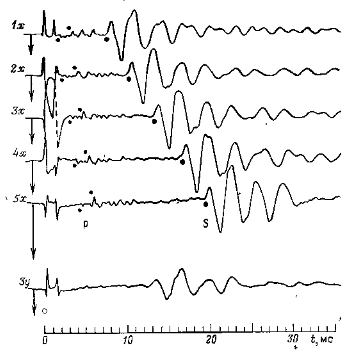


Рис. 5.4. Изгибные волны, вызванные источником типа «шейкер» [82]

нения упругих волн вблизи скважин. По мере того, как продольная волна в окружающей твердой среде проходит через точку наблюдения, во флюиде наблюдаются как импульсы давления, так и движения частиц. Поперечные волны в твердом теле подобным же образом генерируют давление, и движение передается во флюид. Имеются также сильные сигналы, проходящие как в обсаженных, так и в открытых скважинах со скоростью более низкой, чем скорость продольных волн во флюиде скважин. Эти трубные волны могут генерироваться взрывным источником в столбе бурового раствора или в соседней скважине. Они генерируются и тогда, когда продольная волна в окружающей твердой среде встретит

резкую границу раздела. Трубные волны регистрировались приемниками давления и сейсмоприемниками, подвешенными в скважине, заполненной жидкостью, но использование прижимных устройств позволяет ослабить эти волны.

ТРУБНЫЕ ВОЛНЫ В НИЗКОЧАСТОТНОМ ДИАПАЗОНЕ

Описание распространения волн вдоль столба флюида в трубе или скважине сильно упрощается, если рассматриваемые длины волн намного больше диаметра скважины. Поскольку это условие встречается во многих ситуациях, представляющих интерес в сейсмической разведке и сейсмологии, то детальный анализ этого частного случая вполне оправдан. Интуитивно представляется целесообразным рассмотреть смещения, рассчитанные в рамках статической упругости для соответствующих геометрии среды и поля напряжений, предполагая, что такое приближение совпадает с низкочастотным пределом динамического решения. Следует признать, что этот подход не обеспечивает хорошего понимания того, что такое «низкие» частоты и, кроме того, требуются дополнительные суждения для определения необходимых напряжений. Начнем с этого упрощенного анализа, сравнивая, где возможно, результаты с измерениями и более строгим анализом. Как будет показано, приближенный анализ позволяет получить низкочастотную аппроксимацию для таких геометрических ситуаций, которые не удается исследовать точно.

Вывод основных соотношений

В случае тонкой трубы, показанной на рис. 5.5, звуковое давление и осевое смещение частиц рассматриваются в качестве функций только одной координаты и времени $p(z, t)$ и $u_z(z, t)$. Упругая отдача стенки приводит к некоторому радиальному движению, но градиенты радиального давления, сопровождающие это движение, слишком малы, чтобы изменить поршнеобразное движение в осевом направлении. Движение в осевом направлении обусловлено градиентом давления вдоль оси, что может быть выражено количественно путем приравнивания силы к массе, умноженной на ускорение, для элементарной длины колонки флюида:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\Delta z\right)(\pi b^2) = -\rho\,(\pi b^2\,\Delta z)\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \tag{5.1}$$

где b — радиус скважины; ρ — плотность флюида.

Можно найти дополнительную связь между давлением и смещением, зная, что флюид характеризуется объемным модулем B согласно выражению $p = -B(\Delta V/V)$. По мере того как давление растет, элементарная длина изменяется (см. рис. 5.5). Изменение объема состоит из двух частей: первой $-\pi b^2(\partial u_z/\partial z)\Delta z$, обусловленной осевым движением, и второй $-2\pi b\Delta z u_r$, обусловленной радиальным расширением стенки скважины. Деление суммы этих

двух частей на объем $\pi b^2 \Delta z$ дает отношение между давлением и смещением:

$$\frac{p}{B} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{2u_r}{b}\right). \qquad (5.2)$$

Это уравнение можно преобразовать в выражение, включающее только давление и смещение. Предполагая наличие низких частот или медленно изменяющихся импульсов давления, можно было бы ожидать, что радиальное движение находится в равновесии с давлением, существующим в каждый данный период времени. То же предположение о низких частотах позволяет считать, что на расстояниях в несколько диаметров скважины в осевом направлении давление в значительной степени однородно. Учитывая эти ограничения, можно ожидать, что отношение между давлением и радиальным расширением стенки будет адекватно описываться теорией статической упругости. Лэмб [91] получил радиальное смещение, обусловленное давлением во внутренние части толстостенной трубы, которая имеет внутренний b и внешний a радиусы и характеризуется модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν. Из полученных Лэмбом соотношений можно вывести следующее выражение:

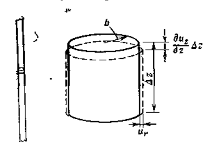


Рис. 5.5 Изменение элементарного объема жидкости в скважине

$$\frac{u_r}{b} = \frac{p}{E}\left[\frac{(1+\nu)(a^2+b^2)-2\nu b^2}{a^2-b^2}\right] = \frac{p}{2M}. \qquad (5.3)$$

Подстановка этого уравнения в (5.2) позволяет получить желаемое соотношение между давлением и осевым смещением:

$$p\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{M}\right) = -\frac{\partial u_z}{\partial z}. \qquad (5.4)$$

Дифференцируя (5.4) по z и подставляя в (5.1), получим волновое уравнение, описывающее движение столба флюида в толстостенной трубе:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \left[\rho\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{M}\right)\right]\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \qquad (5.5)$$

Отсюда следует, что столб флюида в толстостенной трубе способен поддерживать импульсы любой волновой формы $f(t-z/c_T)$ или $g(t+z/c_T)$, проходящие в любом направлении без дисперсии или затухания. Скорость трубных волн в толстостенной трубе

$$c_T = \left[\rho\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{M}\right)\right]^{-1/2}, \qquad (5.6)$$

где

$$M = \frac{E(a^2-b^2)}{2[(1+\nu)(a^2+b^2)-2\nu b^2]}.$$

Для тонкостенной трубы, толщина которой $h=(a-b)$, значения a и b примерно равны, M становится равной $Eh/2b$, и скорость трубных волн

$$c_T = \left[\rho\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{Eh/2b}\right)\right]^{-1/2}. \qquad (5.7)$$

Для скважины в безграничной твердой среде без обсадки величина a очень велика по сравнению с b и величина M стремится к $E/2(1+\nu)$, которая равна сдвиговой жесткости (модулю сдвига) μ. Скорость трубных волн определяется в этом случае соотношением

$$c_T = \left[\rho\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{M}\right)\right]^{-1/2}. \qquad (5.8)$$

Выше было показано, что трубные волны наблюдались в разнообразных экспериментальных условиях. Импульсы давления, вызванные взрывом детонатора и показанные на рис. 5.3, измерялись датчиками давления, расположенными с интервалами около 1,5 м, в двух типах пород. Сдвиговые жесткости пород, рассчитанные с помощью формул (5.8), находятся в соответствии со скоростями поперечных волн, измеренных в тех же формациях [128, 187].

Представляет интерес получить соотношение между давлением и движением частиц во флюиде. Если движение частиц рассматривать как импульс проходящий в положительном направлении, то $u_z=f(t-z/c_T)$, тогда из формул (5.4) и (5.6) следует, что

$$p = \rho c_T f'\left(t-\frac{z}{c_T}\right),$$

где штрих указывает дифференцирование по переменной, заменяющей выражение в скобках. Далее из определения скорости частиц находим $v=f'(t-z/c_T)$. Отсюда следует выражение

$$p=\rho c_T v. \qquad (5.9)$$

Скважина в двухслойной среде

До сих пор мы рассматривали распространение волн в скважинах, окруженных одной однородной средой. Условия вблизи границы между двумя упругими полупространствами (рис. 5.6) можно проанализировать очень просто. Результаты такого анализа помогают изучить поведение трубных волн в скважине, проходящей в более сложной слоистой среде. Если предположить, что падающий импульс давления возбуждает отраженную и проходящую волны, то условие непрерывности давления и скорости частиц на границе

может быть выражено равенствами $p_I+p_R=p_T$ и $p_I/\rho c_{T1}-p_R/\rho c_{T1}=$ $=p_T/\rho c_{T2}$. Согласно этому

$$p_I=f\left(t-\frac{z}{c_{T_1}}\right),$$
$$p_R=\frac{\rho c_{T2}-\rho c_{T1}}{\rho c_{T2}+\rho c_{T1}}f\left(t+\frac{z}{c_{T1}}\right), \qquad (5.10)$$
$$p_T=\frac{2\rho c_{T2}}{\rho c_{T2}+\rho c_{T1}}f\left(t-\frac{z}{c_{T2}}\right).$$

Скважинные волны, наблюдаемые на такой границе, показаны на рис. 5.7. На этом участке контакт между породами мела формации Остен и сланцем формации Игл Форд находится на глуби-

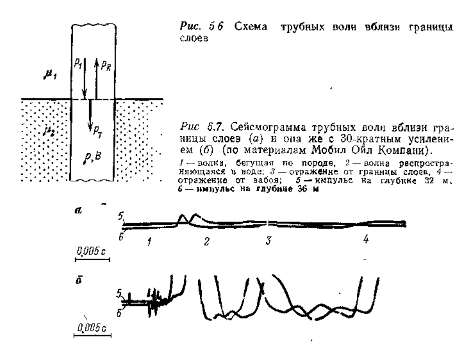


Рис. 5.6 Схема трубных волн вблизи границы слоев

Рис 5.7. Сейсмограмма трубных волн вблизи границы слоев (*а*) и она же с 30-кратным усилением (*б*) (по материалам Мобил Ойл Компани).

1 — волна, бегущая по породе, *2* — волна распространяющаяся в воде; *3* — отражение от границы слоев, *4* — отражение от забоя; *5* — импульс на глубине 32 м, *6* — импульс на глубине 36 м

не 30 м [187]. Детонаторы взрывались в разрезе сланца на расстоянии 9 м ниже границы раздела, а датчики давления располагались на расстоянии 4,5 и 6 м ниже границы раздела. На рис. 5.7 представлены записи волн для соотношения $p_R/p_I=0{,}15$. Если известные значения c_{T1} (770 м/с) и c_{T2} (1140 м/с) подставить в уравнение (5.10), то получим значение 0,19. Такое соответствие можно считать вполне удовлетворительным, поскольку не вводилось никаких поправок на затухание трубных волн при прохождении их от приемников до границы раздела и обратно.

Приведенное выше описание трубных волн на границе раздела заведомо является приближенным. С одной стороны, радиальное смещение в обеих средах при одинаковом давлении флюида различно, и, к тому же, непрерывность радиального смещения является одним из граничных условий на поверхности контакта между двумя слоями. На расстоянии в несколько радиусов скважин над границей раздела или ниже радиальные смещения вполне удовлетворительно описываются уравнением (5.3). Между этими двумя значениями отмечается плавный переход в интервале, который, как уже предполагалось, мал, поэтому этот переход можно заменить ступенчатообразным изменением на границе раздела. Фактические условия на границе раздела без сомнения должны включать взаимодействие с объемными волнами, а именно, трубная волна, проходящая через границу раздела, обязана вызывать некоторое излучение поперечных и продольных волн в окружающую среду. Если диаметр скважины существенно мал по сравнению с самой короткой длиной волны, представляющей для нас интерес, то этим эффектом можно пренебречь.

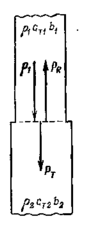


Рис 5.8 Трубные волны вблизи обобщенной границы раздела

Очевидно, формулы (5.10) описывают волны, распространяющиеся по стенке трубы. Отраженные волны появляются в любом случае: будет ли изменение скорости вызвано изменением толщины трубы, изменением модуля Юнга или изменением сдвиговой жесткости в окружающей среде. Изменения плотности или объемного модуля флюида или радиуса скважины тоже порождают отраженные волны, и все они могут быть объединены одним выражением. На рис. 5.8 иллюстрируется скачок по одному или нескольким таким параметрам. При непрерывном давлении и объемном потоке на границе раздела можно написать следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} p_I &= f\left(t-\frac{z}{c_{T1}}\right),\\ p_R &= \frac{\rho_2 c_{T2}/b_2^2-\rho_1 c_{T1}/b_1^2}{\rho_2 c_{T2}/b_2^2+\rho_1 c_{T1}/b_1^2}\, f\left(t+\frac{z}{c_{T1}}\right),\\ p_T &= \frac{2\rho_2 c_{T2}/b_2^2}{\rho_1 c_{T1}/b_1^2-\rho_2 c_{T2}/b_2^2}\, f\left(t-\frac{z}{c_{T2}}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (5.11)$$

Необходимо отметить, что хотя размер скважины не влияет на скорость низкочастотных трубных волн, резкое изменение радиуса скважины тем не менее вызывает появление отраженной волны.

Трубные волны в обсаженных скважинах

Использованное выше при выводе скорости волн в трубе или скважине выражение (5.3) легко распространяется и на случай составной трубы, т. е. двух концентрических твердых цилиндрических оболочек с условием проскальзывания на их контакте. Если внутренний цилиндр представляет собой трубу с тонкими стенками, а внешний — скважину в безграничной среде, выражение для радиального смещения в стенке будет иметь вид

$$\frac{u_r}{b} = \frac{p}{\mu + (Eh/2b)}, \tag{5.12}$$

а скорость волн в этой обсаженной скважине

$$c_{\text{T}} = \left[\rho\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{\mu + (Eh/2b)}\right)\right]^{1/2}. \tag{5.13}$$

Риггс [128] привел измеренные значения скоростей — 1320 м/с в обсаженной скважине и 895 м/с в соседней необсаженной скважине, которые согласуются с приведенными выше выражениями. На основании приведенных им значений для скорости поперечных волн (771 м/с) и плотности пород (2,0 г/см^3) рассчитано значение $\mu = 1{,}15\cdot 10^{10}$ дин/см^2. Риггс сообщил, что трубные волны в изолированной трубе имели бы скорость 1280 м/с. Этот факт говорит о том, что $Eh/2b$ имеет значение $5{,}5\cdot 10^{10}$ дин/см^2, что верно для стальной трубы диаметром 12,7 см и толщиной стенки 0,3 см. Эти константы, подставленные в (5.13) и (5.8) соответственно, дают два значения скорости, согласующиеся с результатами измерения.

Трубные волны в поперечно-изотропной среде

Поскольку сланцы и тонкослоистые осадочные формации ведут себя примерно как поперечно-изотропные твердые тела, этот тип анизотропии представляет особенный интерес. Целесообразно рассмотреть трубные волны в скважине, лежащей вдоль оси симметрии такого твердого тела, поскольку скважины в земле обычно пробуриваются перпендикулярно к слоистости. Аналогично способу, примененному выше для описания толстостенной трубы, было выведено радиальное расширение, вызванное внутренним статическим давлением, а скорость трубных волн в скважине в поперечно-изотропной твердой среде [187]

$$c_{\text{T}} = \left[\rho\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{N}\right)\right]^{1/2}. \tag{5.14}$$

Из пяти упругих констант, требуемых для описания такого твердого тела [95], только одна влияет на скорость трубных волн — это константа N, которая связана со скоростью горизонтально распространяющих и горизонтально поляризованных поперечных волн.

Трубные волны в проницаемой среде

Скважина в земле может проходить через пористые и проницаемые породы. В этом случае импульсы давления в скважине будут заставлять флюид двигаться в стенку скважины и обратно. Предполагается, что этот вынужденный поток вязкого флюида потребляет затраты некоторой энергии. Можно ожидать, что это явление влияет также на фазовую скорость волн, проходящих вдоль столба флюида. Оба эффекта можно рассмотреть на основе следующих рассуждений. Хотелось бы получить результаты, которые соответствуют частотам достаточно низким, чтобы длины трубных волн были велики по сравнению с диаметром скважины. Задача состоит в том, чтобы выяснить, как фазовая скорость и затухание в этом низкочастотном диапазоне зависят от частоты. Для волн в скважине, диаметр которой намного меньше длины волны, амплитуда давления не зависит от радиального положения и движение имеет поршнеобразный характер в направлении оси. Это обстоятельство можно отобразить, взяв $p=P(z)\ e^{i\omega t}$ и $u_z=U(z)\ e^{i\omega t}$.

Когда давление в коротком элементе длины Δz достигает некоторого значения P, объем этого элемента должен соответственно измениться. Разница в движении поршня на двух концах элемента сопровождается тремя видами изменения объема (рис. 5.9). Если бы стена была твердой и непроницаемой, одно только сжатие флюида обеспечило бы следующее изменение объема: $\Delta V_1 = -\pi b^2 \Delta z P/B$. Поскольку стена эластична, возникает дополнительное изменение объема, равное $\Delta V_2 = -\pi b^2 \Delta z P/\mu$. Если колеблющийся поток флюида через стенку управляется импедансом стенки Z (вывод которого дан ниже), то простые расчеты показывают, что это изменение объема может быть записано в виде $\Delta V_3 = -2\pi b \Delta z \frac{P}{i\omega Z}$. Импеданс стенки определяется как отношение давления к стенке скорости потока флюида, проходящего через пористую границу скважины. Общее относительное изменение объема представлено суммой этих трех вкладов, разделенных на объем цилиндрического элемента. Относительное изменение объема равно относительному изменению длины:

$$\frac{\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3}{\pi b^2 \Delta z} = -P\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{\mu} + \frac{2}{i\omega b Z}\right) =$$

$$= \frac{dU}{dz} - \frac{dP}{dz} = \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{\mu} + \frac{2}{i\omega b Z}\right)^{-1} \frac{d^2 U}{dz^2}. \quad (5.15)$$

С другой стороны, отрицательное значение градиента давления равняется ускорению элементарного объема $-\rho\omega^2 U$. Следовательно,

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{\mu} + \frac{2}{i\omega b z}\right)\rho\omega^2 U = 0. \quad (5.16)$$

Из этого уравнения следует, что смещение является экспоненциальной функцией переменной Z. Комплексный коэффициент в экспоненте определяется выражением:

$$a_{\text{T}} + \frac{i\omega}{c_{\text{T}}} = i\omega \left[\rho \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{\mu} + \frac{2}{i\omega b Z} \right) \right]^{1/2}. \tag{5.17}$$

Эта формула определяет затухание и фазовую скорость трубных волн, когда импеданс стенки Z известен. При выводе выражения для импеданса стенки необходимо сделать несколько упрощающих предположений. Как уже упоминалось, дополнительно нам потребуется только скорость флюида, вызванная потоком, прохо-

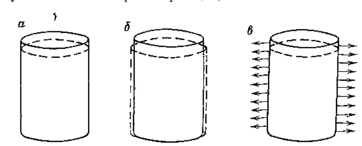


Рис. 5.9 Три составляющие объемного потока при распространении трубной волны в пористых породах

а — сжатие флюида ($\Delta V_1 = -\pi b^2 \Delta z P/B$); *б* — расширение стенки ($\Delta V_2 = -\pi b^2 \Delta z P/\mu$), *в* — поток жидкости внутрь породы ($\Delta V_3 = -2\pi b \Delta z P/i\omega z$)

дящим через границу скважины, поскольку упругая отдача стенки учитывается членом $1/\mu$ в уравнении (5.24). Поэтому в наших рассуждениях скелет проницаемой породы будет считаться жестким. Менее оправдано другое предположение, согласно которому материал, из которого состоит скелет, несжимаем. На низких частотах осциллирующее давление на расстоянии в несколько диаметров меняется в скважине очень незначительно. В этом случае короткий элемент стенки ведет себя приблизительно таким образом, как будто давление не зависит от осевого расстояния. Упругое расширение и среднее направление потока, проходящего через поры, являются радиальными. Импеданс стенки, выведенный для радиального движения, будет применим для низких частот.

Предположим, что на стенке скважины действует давление $Pe^{i\omega t}$ Тогда все величины не зависят от z и θ. В пористой среде закон Дарси имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\eta}{\varkappa} v, \tag{5.18}$$

а условие сохранения непрерывности в сочетании с сжимаемостью жидкости в поровом пространстве дает

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = -\frac{\Phi}{B'} \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{5.19}$$

Коэффициент B' является модулем всестороннего сжатия флюида в поровом пространстве, который может отличаться от соответ-

ствующей характеристики флюида в скважине. Из двух этих уравнений получаем

$$-\frac{\varkappa}{\eta}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}\right)=-\frac{\Phi}{B'}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{5.20}$$

Ранее было сделано предположение, что $p=P'e^{i\omega t}$, где P' — функция только радиуса. Эта величина является амплитудой давления во флюиде в поровом пространстве. Согласно уравнению (5.20) она должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{d^2P'}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dP'}{dr}-i\omega mP'=0, \tag{5.21}$$

где $m=\Phi\eta/\varkappa B'$. Решение этого уравнения, являющееся конечным на небольших расстояниях, таково:

$$P'=\frac{PK_0(\sqrt{i\omega m}r)}{K_0(\sqrt{i\omega m}b)}, \tag{5.22}$$

где $K_0(Z)$ — модифицированная функция Бесселя [см. формулу (5.57)]. Используя уравнение (5.18), находим

$$V'=\frac{(\varkappa P\sqrt{i\omega m}/\eta)\,K_1(\sqrt{i\omega m}r)}{K_0(\sqrt{i\omega m}b)}. \tag{5.23}$$

Поскольку в выражении (5.17) фигурирует величина, обратная импедансу стенки, то из двух приведенных выше формул выводим, что

$$\frac{1}{Z}=\frac{V'}{P'}=\frac{\varkappa}{\eta b}\frac{\sqrt{i\omega m}b\,K_1(\sqrt{i\omega m}b)}{K_0(\sqrt{i\omega m}b)}. \tag{5.24}$$

Это выражение использовалось совместно с (5.17) при оценке фазовой скорости и затухания волн для четырех пористых пород, параметры которых приведены в табл. 5.1 [174]. В качестве флюида в скважине и в поровом пространстве была взята вода с модулем всестороннего сжатия $B=2{,}2\cdot10^{10}$ дин/см^2 и вязкость

ТАБЛИЦА 5.1
СВОЙСТВА ПОРОД

Тип породы	μ 10^{10} дин/см$^{-2}$	Φ	$\varkappa$ 10^{-11} см^2
А	1,40	0,30	10,000
Б	1,40	0,30	1000
В	4,90	0,21	300
Г	2,83	0,10	100

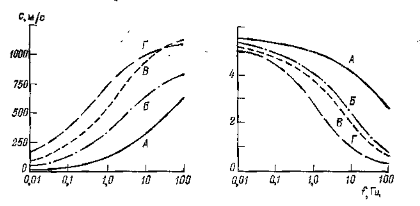


Рис. 5.10. Фазовая скорость и затухание трубных волн для четырех типов пород из табл. 5.1 [174]

$\eta=0{,}01$ г·см/с (или один сантипуаз). Радиус скважины 10 см. Из рис. 5.10 видно, что на частотах ниже 100 Гц фазовая скорость уменьшается, а затухание очень сильное.

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН И СКВАЖИНЫ

Механизм взаимодействия

Термин «взаимодействие» означает здесь ту совокупность явлений, когда упругие волны в бесконечной твердой среде создают напряжение и осевое движение в цилиндре, заполненном жидкостью; при этом предполагается, что все длины волн велики по сравнению с диаметром скважины. Среднее смещение столба флюида, перпендикулярное к оси, такое же, как и смещение окружающей твердой среды. Однако движение частиц в твердой среде, параллельное оси, не обязано создавать движение во флюиде, поскольку флюид не имеет жесткости и вязкость его незначительна. Сильные скважинные сигналы, которые наблюдались благодаря объемным волнам в твердых слоях, могут быть объяснены действием следующего механизма [175].

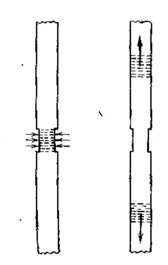


Рис. 5.11. Импульсы давления, генерируемые движением стенки скважины

Существенной особенностью является то, что объемные волны в твердой среде могут искажать скважину таким образом, что площадь ее поперечного сечения в разных точках уменьшается или увеличивается, сдавливая содержащийся флюид и генерируя трубные волны. На рис. 5.11 показано,

как сжатие одного из элементов стенки скважины дает начало импульсам давления, которые распространяются в обоих направлениях от точки возбуждения. Можно вывести количественное соотношение между напряжением и движением стенки следующим образом. В предыдущем разделе отмечалось [см. формулу (5.9)], что давление и скорость частиц пропорциональны, $p=\rho c_T v$. Если бы два поршня, вмонтированные тыльными частями друг к другу, были бы приведены в движение со скоростью v, то они вызвали бы излучение двух импульсов (как показано на рис. 5.11). Фактически, такая же скорость объемного потока в точке источника генерировала бы те же импульсы давления независимо от того, чем вызываются изменения объема. Скорость объемного потока, обусловленного двумя поршнями, равна $2\pi b^2 v$, а скорость, вызванная движением стены, равна $2\pi b dz(\partial u_r/dt)$. Эквивалентная скорость поршня в терминах смещения стенки есть $v=\frac{dz}{b}\frac{du_r}{\partial t}$, а элементарный импульс напряжения

$$\overline{p}=-\frac{\rho c_T\,dz}{b}\,\frac{\partial u_r}{\partial t}. \qquad (5.25)$$

Такие элементарные импульсы возбуждаются объемной сейсмической волной по мере прохождения ее вдоль скважины, при этом возмущение в любой точке наблюдения является суммой этих импульсов, взятых с соответствующими задержками.

Искажение скважины напряжениями в твердой среде

Определим среднее радиальное смещение, вызванное возможным распределением напряжений. На рис. 5.12 показан элементарный куб твердого тела, содержащий еще меньшую скважину. Нормальное напряжение p_{zz}, действующее параллельно оси скважины, вызывает симметричное боковое сжатие. Хотя движение не

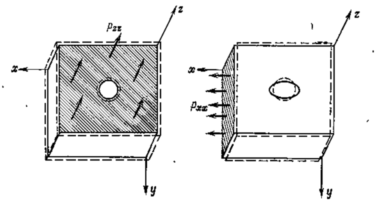


Рис. 5.12. Искажение формы поперечного сечения скважины под воздействием нормальных напряжений

зависит от угла, будем ссылаться на него как на среднее радиальное смещение

$$\bar{u}_r = -b\nu p_{zz}/E\ . \qquad (5.26)$$

Нормальное напряжение p_{xx} (или p_{yy}), перпендикулярное к оси скважины, трансформирует скважину до овальной формы [158]. Чистое расширение скважины характеризуется средним радиальным смещением

$$\bar{u}_r = bp_{xx}/E,\quad \bar{u}_r = bp_{yy}/E\ . \qquad (5.27)$$

Касательные напряжения p_{xy}, p_{yz} и p_{zx} искажают скважину, но не создают чистых изменений в поперечном сечении и, следовательно, не генерируют сигналов давления.

Движение стенки, вызванное плоской продольной волной

Плоская продольная волна в твердой среде с известными свойствами полностью описывается ее направлением распространения и зависимостью нормального напряжения от времени. Если это направление находится в плоскости XZ под углом δ к оси z, то напряжение можно записать в виде $N=(t-x\sin\delta/\alpha-z\cos\delta/\alpha)$, где α — скорость продольных волн в твердой среде. Исходя из того, что движение частиц в волне является чисто продольным, нормальное напряжение существует в каждом из перпендикулярных направлений и равно $[\nu/(1-\nu)]N(t-x\sin\delta/\alpha-z\cos\delta/\alpha)$. Эти характеристики плоских волн обсуждались при выводе формул (2.6) и (2.18). Из табл. 3.1 легко видеть, что $\lambda/(\lambda+2\mu)=\nu/(1-\nu)$. Скважинные сигналы создаются этими напряжениями у стенки скважины, которая лежит вдоль оси z. Прежде чем применить эти два, только что выведенные, выражения необходимо выразить напряжения через нормальные напряжения, параллельные оси скважины и перпендикулярные к ней. Напряжение, параллельное оси, создается напряжением вдоль направления распространения волны и одним боковым нормальным напряжением [95]:

$$p_{zz} = \left(\cos^2\delta + \frac{\nu}{1-\nu}\sin^2\delta\right) N\left(t - \frac{z\cos\delta}{\alpha}\right). \qquad (5.28)$$

Те же два напряжения создают напряжение в плоскости, перпендикулярной к оси скважины:

$$p_{xx} = \left(\sin^2\delta + \frac{\nu}{1-\nu}\cos^2\delta\right) N\left(t - \frac{z\cos\delta}{\alpha}\right). \qquad (5.29)$$

Другое боковое напряжение действует перпендикулярно к оси скважины независимо от направления распространения волны, т. е.

$$p_{yy} = \frac{\nu}{1-\nu} N\left(t - \frac{z\cos\delta}{\alpha}\right). \qquad (5.30)$$

Как уже отмечалось, сдвиговые напряжения не вызывают среднего радиального движения и ими можно пренебречь.

Все три напряжения, которые входят в формулы (5.26) и (5.27), дают общее среднее радиальное смещение, вызываемое плоской продольной волной:

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_r &= \frac{b}{E}\,\frac{\nu(1+\nu)+(1-\nu-2\nu^2)\sin^2\delta}{1-\nu}\,N\left(t-\frac{z\cos\delta}{\alpha}\right),\\ \bar{u}_r &= \frac{b}{2\mu}\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cos^2\delta\right)N\left(t-\frac{z\cos\delta}{\alpha}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (5.31)$$

Движение стенки, вызванное плоской поперечной волной

Предположим, что направление распространения плоской поперечной волны проходит в плоскости XZ, составляя угол δ с осью скважины. Если поперечная волна характеризуется движением, перпендикулярным к плоскости XZ (волны SH), то скважина будет искажаться при прохождении этой волны, но без изменения поперечного сечения, поэтому давление останется постоянным. Поперечные волны с движением в плоскости XZ (волны SV) требуют более внимательного рассмотрения. Напряжение, сопровождающее такую поперечную волну, когда она достигает скважины ($x=0$), имеет вид: $T\left(t-\frac{z\cos\delta}{\beta}\right)$. Это напряжение, отнесенное к оси скважины, эквивалентно одному сдвиговому напряжению, которое не вызывает изменений площади поперечного сечения скважины и двум нормальным напряжениям:

$$\left.\begin{aligned}p_{xx} &= -2\sin\delta\cos\delta\, T\left(t-\frac{z\cos\delta}{\beta}\right)\\ p_{zz} &= 2\sin\delta\cos\delta\, T\left(t-\frac{z\cos\delta}{\beta}\right)\end{aligned}\right\}. \qquad (5.32)$$

Подставив эти напряжения (в 5.26) и (5.27), получим среднее радиальное смещение, вызываемое плоской поперечной волной:

$$\bar{u}_r = -\frac{b}{\mu}\sin\delta\cos\delta\, T\left(t-\frac{z\cos\delta}{\beta}\right). \qquad (5.33)$$

Суммирование элементарных импульсов

Когда волна проходит вдоль скважины, волны давления генерируются в соответствии с локальным радиальным смещением, которое рассчитывается по локальным напряжениям в предположении, что скважина пустая. Давление в точке наблюдения есть сумма этих всех вкладов, каждый из которых имеет задержку на время распространения волны между точкой возбуждения и точкой наблюдения. Если точку наблюдения взять за Z, то дополнительная задержка будет $(Z-z)/c_T$ в том случае, если точка возбуждения лежит ниже Z, в то время как задержка равна (z—

$-Z)/c_T$, если z лежит выше Z. Суммирование вкладов давления от всех точек, расположенных вдоль скважины, можно выразить формулой

$$P(Z,T) = -\frac{\rho c_T}{b}\left[\int_{-\infty}^{Z}\left(\frac{\partial \bar{u}_Z}{\partial t}\right)_{t=T-(Z-z)/c_T} dz + \int_{Z}^{\infty}\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}\right)_{t=T-(z-Z)/c_T} dz\right]. \tag{5.34}$$

Поскольку скорости движения частиц имеют противоположный знак, в зависимости от того, откуда приходит волна — сверху или снизу, полная скорость движения частиц равна разности двух интегралов:

$$v(Z,T) = -\frac{1}{b}\left[\int_{-\infty}^{Z}\left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t}\right)_{t=T-(Z-z)/c_T} dz - \int_{z}^{\infty}\left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t}\right)_{t=T-(z-Z)/c_T} dz\right]. \tag{5.35}$$

Оба выражения универсальны. Они могут использоваться для любого нарушения в окружающей скважину среде, поскольку соответствующие напряжения вдоль скважины можно выразить как функции времени и координат. Используя формулы (5.26) и (5.27), эти выражения преобразуем в выражения для радиального движения, из которого можно рассчитать давление и скорость частиц.

Скважинные сигналы, вызываемые плоской продольной волной

Подставив в (5.34) сумму радиальных движений, определяемых формулой (5.31), и выполнив интегрирование, получим давление в скважине, обусловленное прохождением плоской продольной волны:

$$P(Z,T) = -\frac{\rho c_T^2}{\mu}\left[1-2\left(\frac{\beta\cos\delta}{\alpha}\right)^2\right]\frac{1}{1-(c_T\cos\delta/\alpha)^2}\,N\left(T-\frac{Z\cos\delta}{\alpha}\right). \tag{5.36}$$

Согласно (5.35), скорость частиц флюида, вызываемая плоской продольной волной,

$$v(Z,T) = -\frac{c_T}{\mu}\,\frac{c_T\cos\delta}{\alpha}\left[1-2\left(\frac{\beta\cos\delta}{\alpha}\right)^2\right]\times \frac{1}{1-(c_T\cos\delta/\alpha)^2}\,N\left(T-\frac{Z\cos\delta}{\alpha}\right). \tag{5.37}$$

По-видимому, не удивительно, что отношение давления к скорости частиц равно произведению плотности флюида и кажущейся скорости вдоль скважины:

$P(Z,T) = (\rho\alpha/\cos\delta)\,v(Z,T)$.

Скважинные сигналы, вызываемые плоской поперечной волной

Если в (5.34) и (5.35) подставить среднее радиальное смещение из уравнения (5.33), то найдем соответственно давление и скорость частиц во флюиде скважины, вызванные прохождением плоской поперечной волны

$$P(Z, \Gamma) = \frac{\rho c_T^2 \sin 2\delta}{\mu} \frac{1}{1-(c_T \cos\delta/\beta)^2} T\left(T - \frac{Z\cos\delta}{\beta}\right)$$

$$v(Z, T) = \frac{c_T}{\mu} \frac{c_T \cos\delta}{\beta} \sin 2\delta \frac{1}{1-(c_T \cos\delta/\beta)} T\left(T - \frac{Z\cos\delta}{\beta}\right). \quad (5.38)$$

Видно, что давление и скорость частиц пропорциональны друг другу с коэффициентом пропорциональности, равным произведению плотности и кажущейся скорости

$$P(Z, T) = (\rho\beta/\cos\delta)\, v(Z, T).$$

Скважина в двухслойной среде

С помощью описанной здесь приближенной теории, скважинные сигналы, вызываемые объемными волнами, могут быть вычислены очень просто даже в том случае, когда скважина проходит не только через одну среду. На рис. 5.13 изображен случай плоской

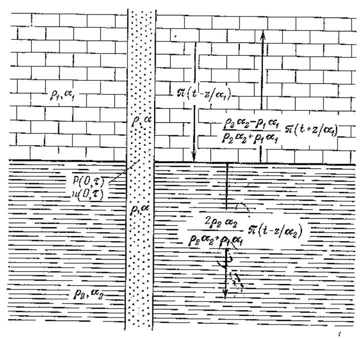


Рис. 5.13 Соотношение амплитуд трубных волн вблизи границы слоев

продольной волны, нормально падающей на границу раздела двух сред. Найдем давление и скорость частиц на границе раздела $z=0$. Падающая волна напряжения создает давление в скважине, которое соответствует первому слагаемому в правой части (5.34); причем возмущения суммируются над границей раздела сред. Достигая границы раздела, эти элементарные трубные волны отражаются согласно соотношениям (5.10). Отраженная волна давления подобным же образом создает элементарные волны, суммируемые вторым слагаемым в (5.34), и соответствующая трубная волна также отражается. Проходящая (преломленная) волна давления вызывает импульсы, суммируемые с помощью второго члена в уравнении (5.34) с использованием упругих констант второй среды; суммарная трубная волна отражается от границы раздела снизу. Проведенное Уайтом [195] более детальное исследование показывает, что на границе раздела общее давление

$$P(0, T) = \left[\frac{\rho c_{T1}^2}{\mu_1}\left(1-\frac{2\beta_1^2}{\alpha_1^2}\right)\frac{1}{1+c_{T1}/c_{T2}}\left(\frac{1}{1-c_{T1}/\alpha_1}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+c_{T1}/\alpha}\,\frac{1-\rho_1\alpha_1/\rho_2\alpha_2}{1+\rho_1\alpha_1/\rho_2\alpha_2}\right)+\frac{\rho c_{T2}^2}{\mu_2}\left(1-\frac{2\beta_2^2}{\alpha_2^2}\right)\times$$

$$\left.\times\frac{1}{1+c_{T2}/c_{T1}}\,\frac{1}{1+c_{T2}/\alpha_2}\,\frac{2}{1+\rho_1\alpha_1/\rho_2\alpha_2}\right][-N(T)]. \qquad (5.39)$$

Давление на границе раздела имеет ту же временную зависимость, что и волна в среде, окружающей скважину, и понятно, что давление, вызываемое напряжением сжатия, положительно для любой комбинации упругих констант.

Подобным же образом находим скорость частиц флюида на плоскости границы раздела

$$v(0, T) = \left[\frac{c_{T1}}{\mu_1}\left(1-\frac{2\beta_1^2}{\alpha_1^2}\right)\frac{1}{1+c_{T2}/c_{T1}}\left(\frac{1}{1-c_{T1}/\alpha_1}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1+c_{T1}/\alpha_1}\,\frac{1-\rho_1\alpha_1/\rho_2\alpha_2}{1+\rho_1\alpha_1/\rho_2\alpha_2}\right)-\frac{c_{T2}}{\mu_2}\left(1-\frac{2\beta_2^2}{\alpha_2^2}\right)\times$$

$$\left.\times\frac{1}{1+c_{T1}/c_{T2}}\,\frac{1}{1+c_{T2}/\alpha_2}\,\frac{2}{1+\rho_1\alpha_1/\rho_2\alpha_2}\right][-N(T)]. \qquad (5.40)$$

Для напряжения сжатия первый член в выражении для скорости частиц флюида положителен; это означает, что движение происходит в положительном направлении, в то время как второй член отрицателен. В зависимости от контраста в упругих свойствах, общий член может быть отрицательным, отображая ситуацию, в которой флюид на границе раздела движется в отри-

цательном направлении, а окружающая твердая среда перемещается в положительном направлении.

Это обстоятельство иногда наблюдается при сейсмическом каротаже нефтяных скважин, когда сигналы от поверхностного взрыва динамита наблюдаются в приемнике, подвешенном в скважине, заполненной флюидом. Формула (5.40) показывает, что вступление обратной полярности будет появляться, когда приемник располагается на границе раздела между верхним жестким и нижним, менее жестким, слоями. На рис. 5.14 показаны первые вступления волн на четырех глубинах в скважине с двумя разными уровнями чувствительности. Контакт между вышележащим

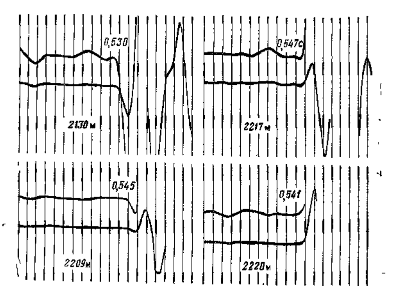


Рис 5.14. Запись скважинных сигналов на четырех глубинах [186]

известняковым слоем и глинистым сланцем отмечается на глубине 2220 м [186]. Первое вступление, вызванное поверхностным взрывом, обычно происходит в направлении вниз, что и наблюдается на глубине 2130 м. На глубине же 2435 м первое вступление имеет четкую положительную полярность. Подстановка возможных упругих констант для известняка и сланца в уравнение (5.40) показывает, что второе слагаемое больше первого; следовательно, это выражение находится в соответствии с наблюдаемой обратной полярностью.

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В главе 2 мы рассматривали распространение упругих волн в однородной изотропной среде и отражение плоских волн от плоских границ, используя прямоугольные координаты. Задача этого раз-

дела состоит в том, чтобы дать параллельное изложение теории в цилиндрических координатах, используя в качестве иллюстрации взаимодействие конических волн на цилиндрической границе. Вначале дадим схематический вывод уравнений движения, отметив возможность построения решения в потенциалах. Это ведет к функциям Бесселя, некоторые характеристики которых уже использовались нами ранее.

Напряжения и деформации

В цилиндрических координатах r, θ и z вводятся три компоненты смещения: u_r, u_θ и u_z. Выделим в окрестности некоторой точки среды элементарный объем с размерами Δr, $r\Delta\theta$ и Δz.

В истинных пропорциях этот объем почти не отличается от совершенного куба, поэтому кривизна и углы даны на рис. 5.15 с

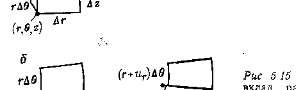


Рис 5 15 Элементарный объем (а) и вклад радиального смещения u_r в деформацию сдвига $e_{\theta\theta}$ (б)

некоторым преувеличением. Однако имеющейся малой кривизной пренебрегать нельзя. Относительное удлинение в направлении r характеризуется деформацией $e_{rr}=[u_r(r+\Delta r)-u_r(r)]/\Delta r=\frac{\partial u_r}{\partial r}$, которая не включает кривизну. Удлинение в направлении имеет слагаемое $[u_\theta(\theta+\Delta\theta)-u_\theta(\theta)]/r\Delta\theta=(1/r)\ \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}$, которое отвечает растяжению элементарного куба. Однако в этом случае имеется дополнительный член, содержащий u_r (см. рис. 5.15,б). Приравняв длину дуги хорде, выразим относительное удлинение, возникающее из-за чистого радиального движения: $[(r+u_r)\Delta\theta-r\Delta\theta]/r\Delta\theta=u_r/r$. Аналогично формулам (2.1) напишем выражения для деформации в цилиндрических координатах:

$$\left.\begin{aligned}
e_{rr} &= \partial u_r/\partial r,\\
e_{\theta\theta} &= u_r/r+\partial u_\theta/r\partial\theta,\\
e_{zz} &= \partial u_z/\partial z,\\
e_{r\theta} &= \frac{1}{r}\ \frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r},\\
e_{\theta z} &= \frac{1}{r}\ \frac{\partial u_z}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial z},\\
e_{zr} &= \partial u_z/\partial r+\partial u_r/\partial z,
\end{aligned}\right\} \qquad (5.41)$$

Связь деформации и напряжения имеет ту же форму, что и в прямоугольных координатах:

$$\left.\begin{aligned} p_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\, e_{rr} + \lambda e_{\theta\theta} + \lambda e_{zz}, \\ p_{\theta\theta} &= \lambda e_{rr} + (\lambda + 2\mu)\, e_{\theta\theta} + \lambda e_{zz}, \\ p_{zz} &= \lambda e_{rr} + \lambda e_{\theta\theta} + (\lambda + 2\mu)\, e_{zz}, \\ p_{\theta z} &= \mu e_{\theta z},\ p_{zr} = \mu e_{zr},\ p_{r\theta} = \mu e_{r\theta}. \end{aligned}\right\} \quad (5.42)$$

Уравнения движения

Чтобы упростить вывод, ограничимся случаем осевой симметрии, т. е. возьмем u_θ равную нулю, а u_r и u_z — независимыми от θ. С этими ограничениями рассмотрим силы, действующие на элемен-

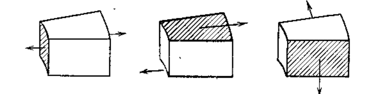


Рис 5.16 Силы, действующие на цилиндрический элемент

тарный объем. Из рис. 5.16 видно, что имеется радиальная сила, значение которой, отнесенное к единице объема,

$$\frac{[(r + \Delta r)\,\Delta\theta p_{rr}(r + \Delta r) - r\Delta\theta p_{rr}(r)]\,\Delta z}{\Delta r r \Delta\theta\Delta z} = \frac{p_{rr}}{r} + \frac{\partial p_{rr}}{\partial r}.$$

Касательные напряжения на гранях z определяют другую радиальную силу

$$\frac{p_{zr}(z + \Delta z)\, r\Delta\theta\Delta r - p_{zr}(z)\, r\Delta\theta\Delta r}{\Delta r r \Delta\theta\Delta z} = \frac{\partial p_{zr}}{\partial z}.$$

На рисунке видно, что хотя $p_{\theta\theta}$ имеет одинаковую амплитуду на обеих θ-поверхностях, направления результирующих сил не являются точно противоположными. Отсюда возникает дополнительная сила с амплитудой $p_{\theta\theta}\Delta\theta\Delta r\Delta z$. Отнеся ее к единичному объему, получим $-p_{\theta\theta}/r$. Суммируя силы, действующие в направлении Z, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{p_{rr} - p_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial p_{zr}}{\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial p_{zr}}{\partial r} + \frac{p_{zr}}{r} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \quad (5.43)$$

В терминах смещений уравнения движения запишутся так:

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right)+$$
$$+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\,\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \tag{5.44}$$
$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\,\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+$$
$$+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.$$

Потенциалы смещений

Введем скалярный потенциал Φ, исходя из условий

$$u_r=\partial\Phi/\partial r,\ u_z=\partial\Phi/\partial z. \tag{5.45}$$

Подставляя эти соотношения в оба уравнения (5.44), получим, что Φ должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \tag{5.46}$$

где

$$\alpha^2=(\lambda+2\mu)/\rho.$$

Предположив, что

$$\Phi(r,\ z,\ t)=R(r)Z(z)T(t), \tag{5.47}$$

уравнение (5.46) можно свести к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям. Подстановка в (5.46) показывает, что функции $Z(z)$ и $T(t)$ должны быть взяты в экспоненциальной форме:

$$Z(z)=e^{ilz},\ T(t)=e^{i\omega t}. \tag{5.48}$$

Тогда функция $R(r)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{uR}{dr}-\left(l^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)R=0 \tag{5.49}$$

Решения этого уравнения являются функциями Бесселя нулевого порядка. Используя то же самое обозначение, что и в гл. 2, положим $M^2=l^2-\omega^2/\alpha^2$, тогда решениями будут модифицированные функции Бесселя $I_0(Mr)$ и $K_0(Mr)$:

$$R(r)=A_1I_0(Mr)+A_2K_0(Mr). \tag{5.50}$$

Векторный потенциал, определяемый согласно соотношениям (2.19), также может использоваться для построения решений в цилиндрических координатах. Био [13] показал, что в случае осевой симметрии он имеет единственную компоненту Ψ_θ, отличную от нуля. Мы будем опускать нижний символ. Смещения, удовлетворяющие уравнению движения, выражаются через этот потенциал следующим образом:

$$u_r = -\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r}. \tag{5.51}$$

Функция Ψ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{\Psi}{r^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}, \tag{5.52}$$

где $\beta^2 = \mu/\rho$.

Решая (5.52) по методу разделения переменных, получим, что $Z(z)$ и $T(t)$ опять должны быть экспонентами вида (5.48). Тогда $R(r)$ должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} + l^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2}\right) R = 0 \tag{5.53}$$

Решения этого уравнения могут быть выражены через модифицированные функции Бесселя $I_1(Kr)$ и $K_1(Kr)$ при $K^2 = l^2 - \omega^2/\beta^2$, т. е.

$$R(r) = B_1 I_1(Kr) + B_2 K_1(Kr). \tag{5.54}$$

Оба потенциала могут быть записаны с помощью двойного преобразования Фурье

$$\left.\begin{aligned}
\Phi(r, z, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[A_1(l, \omega) I_0(Mr) + \\
&+ A_2(l, \omega) K_0(Mr)]\, e^{ilz} e^{i\omega t}\, dl\, d\omega, \\
\Psi(r, z, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[B_1(l, \omega) I_1(Kr) + \\
&+ B_2(l, \omega) K_1(Kr)]\, e^{ilz} e^{i\omega t}\, dl\, d\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{5.55}$$

Нам потребуются некоторые формулы, связывающие смещения и напряжения в цилиндрических координатах. В частности, полезны следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}
u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z},\\
u_\theta &= 0,\\
u_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r},\\
p_{rr} &= \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r\, \partial z}\right),\\
p_{r\theta} &= 0,\\
p_{zr} &= \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - 2\mu\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r\, \partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (5.56)$$

Функции Бесселя

В случае прямоугольных координат мы имели два независимых решения e^{imx} и e^{-imx} (или e^{mx} и e^{-mx}). Разумеется, эти решения могут быть скомбинированы так, чтобы дать другую пару независимых функций $\cos mx$ и $\sin mx$ (или $\operatorname{ch} mx$ и $\operatorname{sh} mx$). Таким образом, в случае прямоугольных координат потенциалы могут быть выражены как комбинации тригонометрических, экспоненциальных или гиперболических функций. Выбор функции Бесселя в уравнении (5.50) эквивалентен выбору $A_1 \operatorname{ch} \bar{m}x + A_2 e^{-mx}$ в прямоугольных координатах. Если величина $\bar{m}$ чисто мнимая, то последнее выражение будет иметь вид: $A_1 \cos mx + A_2 (\cos mx - i \sin mx)$. Здесь имеется тесная аналогия с функциями Бесселя. По определению, величина M в (5.50) является либо вещественной (в этом случае положим $M = \bar{m}$), либо чисто мнимой ($M = im$). В этом случае вещественного M широко используются функции $I_0(\bar{m}r)$ и $K_0(\bar{m}r)$ [2, 87]. Величина $I_0(\bar{m}r)$ равна 1 при $r = 0$ и возрастает экспоненциально при больших r. Величина $K_1(mr)$ стремится к бесконечности при $r \to 0$ и экспоненциально убывает при больших r. Если M чисто мнимое, то независимыми функциями являются $J_0(mr)$ и $N_0(mr)$ [см. формулу (5.57)]. Многие авторы используют символ $Y_0(mr)$ вместо $N_0(mr)$. Величина $J_0(mr)$ равна 1 при $r = 0$, а при возрастании r осциллирует с убывающей амплитудой. Величина $N_0(mr) \to -\infty$ при $r \to 0$ и осциллирует с возрастающей амплитудой при увеличении r.

Аналогично тому, как комбинация синуса и косинуса дает экспоненциальную функцию, соответствующие комбинации $J_0(mr)$ и $N_0(mr)$ дают функцию Ханкеля первого и второго рода $H^{(1)}{}_0(mr)$ и $H^{(2)}{}_0(mr)$. Это также можно отнести к функциям Бесселя $I_1(\bar{k}r)$, $K_1(\bar{k}r)$, $J_1(kr)$ и т. д.

Ниже приводятся полезные определения и тождества:

$$\left.\begin{aligned} &I_0(imr) = J_0(mz), \quad I_1(ikr) = iJ_1(kr), \\ &K_0(imr) = -\frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(mr), \quad K_1(ikr) = -\frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(kr), \\ &H_0^{(1)}(mr) = J_0(mr) + iN_0(mr), \quad H_0^{(2)}(mr) = J_0(mr) - iN_0(mr); \\ &H_1^{(1)}(kr) = J_1(kr) + iN_1(kr), \quad H_1^{(2)}(kr) = J_1(kr) - iN_1(kr). \end{aligned}\right\} \quad (5.57)$$

При больших значениях аргумента функции Ханкеля имеют асимптотики:

$$\left.\begin{aligned} &H_0^{(1)}(mr) \to \left(\frac{2}{\pi mr}\right)^{1/2} e^{i(mr-\pi/4)}, \\ &H_0^{(2)}(mr) \to \left(\frac{2}{\pi mr}\right)^{1/2} e^{-i(mr-\pi/4)}, \\ &H_1^{(1)}(kr) \to \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} e^{i(kr-3\pi/4)}, \\ &H_1^{(2)}(kr) \to \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} e^{-i(kr-3\pi/4)}, \\ &K_0(z) \to \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}, \\ &K_1(z) \to \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}. \end{aligned}\right\} \quad (5.58)$$

Для малых значений аргументов справедливы следующие аппроксимации:

$$\left.\begin{aligned} &I_0(\overline{m}r) \to 1, \quad K_0(\overline{m}r) \to -\ln(mr), \\ &I_1(\overline{k}r) \to (\overline{k}r/2), \ K_1(\overline{k}r) \to (1/\overline{k}r), \\ &J_0(mr) \to 1, \quad N_0(mr) \to (2/\pi)\ln(mr) \\ &J_1(kr) \to (kr/2), \ N_1(kr) \to -(2/\pi kr). \end{aligned}\right\} \quad (5.59)$$

Ниже даны производные функций Бесселя:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dI_0(kr)}{dr} = kI_1(kr), \\ &\frac{dK_0(kr)}{dr} = -kK_1(kr), \\ &\frac{dI_1(kr)}{dr} = k\left[I_0(kr) - \frac{I_1(kr)}{kr}\right], \\ &\frac{dK_1(kr)}{dr} = -k\left[K_0(kr) + \frac{K_1(kr)}{kr}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (5.60)$$

ВОЛНЫ ВДОЛЬ СКВАЖИНЫ, НЕ ЗАПОЛНЕННОЙ РАСТВОРОМ

Потенциалы, удовлетворяющие граничным условиям

Все главные особенности волн, распространяющихся вдоль скважины, можно рассмотреть в самом простом случае, когда она пустая (без раствора). В этом случае потенциалы вводятся только для окружающей среды и поскольку среда простирается по r безгранично, мы можем исключить из (5.55) слагаемые, содержащие $I_0(Mr)$ и $I_1(Kr)$. Следовательно,

$$\Phi(r, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(l, \omega) K_0(Mr) e^{ilz} e^{i\omega t} \, dl \, d\omega,$$
$$\Psi(r, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(l, \omega) K_1(Kr) e^{ilz} e^{i\omega t} \, dl \, d\omega. \quad (5.61)$$

Поскольку скважина пустая, то нормальные и касательные напряжения на стенке скважины (т. е. при $r=b$) равны нулю. Мы считаем возможным ввести идеализированные источники, которые определяют нормальные или касательные напряжения на стенке скважины, не вызывая других возмущений движения. Используя связь напряжений с потенциалами, согласно формулам (5.56) получим следующую пару уравнений:

$$D_{11}A + D_{12}B = P_{rr}(b, l, \omega),$$
$$D_{21}A + D_{22}B = P_{zr}(b, l, \omega), \quad (5.62)$$

где

$$D_{11} = \rho\beta^2[(l^2+K^2)K_0(Mb) + (2M/b)K_1(Mb)];$$
$$D_{12} = 2\rho\beta^2 ilK[K_0(Kb) + (1/Kb)K_1(Kb)];$$
$$D_{21} = -2\rho\beta^2 ilMK_1(Mb);$$
$$D_{22} = \rho\beta^2(l^2+K^2)K_1(Kb).$$

Свободная от напряжений скважина

В главе 2 рассматривались условия, при которых поверхностные волны распространяются вдоль свободной плоской границы без затухания. В частности, было получено, что волна Рэлея распространяется со скоростью, не зависящей от частоты.

Био [13] описал аналогичные условия, при которых незатухающие волны распространяются в осевом направлении вдоль свободной от напряжения скважины. Если в системе уравнений (5.62) правые части P_{rr} и P_{zr} равны нулю, то A и B также должны быть равными нулю при условии, что детерминант матрицы системы не равен нулю. Однако при некоторых значениях ω и l детерминант $D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21} = 0$. В этом случае вдоль скважины

распространяется волна с фазовой скоростью $\omega/l=c$. Как было показано Био, условие равенства детерминанта нулю дает на любой частоте фазовую скорость:

$$4\left(1-\frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{\bar{k}b}+\frac{K_0(\bar{k}b)}{K_1(\bar{k}b)}\right]-$$
$$-\frac{2\left(2-\frac{c^2}{\beta^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}}{\bar{m}b}-\frac{\left(2-\frac{c^2}{\beta^2}\right)K_0(\bar{m}b)}{\left(1-\frac{c^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}K_1(\bar{m}b)}=0 \qquad (5.63)$$

При $c^2<\beta^2<\alpha^2$ величины M и K вещественны ($M=\bar{m}$, $K=\bar{k}$). Био вычислил отношение фазовой скорости к скорости попереч-

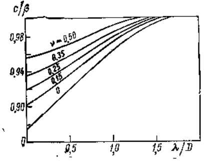


Рис. 5.17. Графики фазовой скорости поверхностных волн в полой скважине [13]

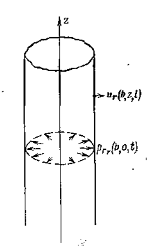


Рис. 5.18. Кольцевой источник в полой скважине

ных волн как функцию отношения кажущейся по направлению оси скважины (осевой) длины волны к диаметру скважины $D=2b$, причем осевая длина волны определяется из равенства $2\pi/\lambda=\omega/c$. Результаты расчетов приведены на рис. 5.17. В качестве параметра кривых взят коэффициент Пуассона, который характеризует среды с различными скоростями продольных волн. Как было отмечено Био, фазовая скорость c стремится к скорости волны Рэлея на свободной поверхности, если длина волны становится малой по сравнению с радиусом кривизны b. Выше максимального значения длины волны уравнение (5.63) не выполняется. В этой точке $c=\beta$ и при дальнейшем увеличении c величина K становится мнимой. Указанный максимум Био назвал предельной длиной волны[1] λ_c. Термин в значительной мере является произвольным, так как решения для потенциалов в окрестности этого

[1] В оригинале используется термин «cut-off Wavelength», что дословно можно было бы перевести длиной волны среза. (Прим. пер.).

значения фазовой скорости изменяются незначительно. При $\lambda > \lambda_c$ волна затухает в осевом направлении, но при λ незначительно больших, чем λ_c, затухание очень малое.

Источники и выходные сигналы

Так как наша цель состоит в том, чтобы описать излучение из скважины и отклик акустического скважинного датчика, необходимо предварительно охарактеризовать известные напряжения на стенке скважины. Для простоты возьмем P_{zr} равным нулю, а P_{rr} независимым от l и ω, тогда

$$P_{rr}(b, l, \omega) = Q,$$
$$P_{rr}(b, z, t) = Q\delta(z)\delta(t). \qquad (5.64)$$

Эти формулы описывают кольцевой источник радиально направленной силы при $z=0$, применяемой в вице импульса при $t=0$ (рис. 5.18). Тогда согласно уравнениям (5.61)

$$A = D_{22}Q/(D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21}),$$
$$B = -D_{21}Q/(D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21}). \qquad (5.65)$$

В качестве измеряемого выходного сигнала возьмем радиальное смещение на стенке скважины на расстоянии z от источника. Используя первую формулу из (5.56) и найденные значения A и B, получим

$$U_r(b, l, \omega) = \frac{Q[-MD_{22}K_1(Mb) + lD_{21}K_1(Kb)]}{(D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21})} - \mathrm{Re} + i\,\mathrm{Im}. \qquad (5.66)$$

Эта функция от l и ω представляет собой двойное преобразование Фурье искомого решения $u_r(b, z, t)$, поэтому необходимо каким-то образом выполнить интегрирование по l и ω. Ограничимся анализом численного интегрирования на ЭВМ полученных приближенных результатов. В связи с этим рассмотрим следующие три аспекта: необходимость замены интеграла суммой при l и ω, взятых с шагом Δl и $\Delta\omega$ соответственно; необходимость ограничения области суммирования конечными пределами по l и ω; необходимость обойти сингулярности, имеющиеся в $V_r(b, l, \omega)$.

Численное преобразование Фурье

Интервалы дискретизации. Функция $U_r(b, l, \omega)$ должна быть представлена системой дискретных отсчетов, взятых через интервалы Δl и $\Delta\omega$. Это может быть достигнуто, если вместо источников, выраженных равенствами (5.64), взять следующие:

$$\left.\begin{aligned} P_{rr}(b, l, \omega) &= Q \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Delta l\delta(l - p\Delta l) \sum_{q=-\infty}^{\infty} \Delta\omega\delta(\omega - q\Delta\omega), \\ P_{rr}(b, z, t) &= Q \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(z - 2\pi p/\Delta l) \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi q/\Delta\omega). \end{aligned}\right\} \qquad (5.67)$$

Эффект дискретизации по l добавляет к единичному кольцевому источнику в начале координат бесконечную систему «ложных» источников, размещенных через интервал $2\pi/\Delta l$ вдоль оси z. Аналогично дискретизация по ω заставляет источник повторять воздействие во времени через промежутки времени $2\pi/\Delta\omega$.

Конечные пределы суммирования. Фигурирующие в (5.67) бесконечные суммы, конечно, не могут быть вычислены, поэтому пределы по l и ω должны быть ограничены. Это может быть достигнуто, если предположить, что $P_{rr}(b, l, \omega)$ в (5.67) умножается вместо Q на функцию $G(l)F(\omega)$, где $G(l)$ и $F(\omega)$ равны нулю вне интервалов суммирования:

$$P_{rr}(b, l, \omega) - G(l) \sum_p \Delta l \delta(l - p\Delta l) F(\omega) \sum_q \Delta\omega \delta(\omega - q\Delta\omega). \qquad (5.68)$$

Умножению в спектральной области отвечает свертка по z и по t, поэтому теперь можно представить источинк в виде некоторого шаблона $g(z)$, повторяющегося с периодом $2\pi/\Delta l$ вдоль оси z и излучающего импульс $f(t)$ через временной период $2\pi/\Delta\omega$. Выберем следующие функции [191]:

$$G(l) = [U(l+l_M) - U(l-l_M)]\,[\sin(\pi l/l_M)/(\pi l/l_M)],$$
$$g(z) = (1/\pi)\,[\mathrm{Si}(l_M z+\pi) - \mathrm{Si}(l_M z-\pi)]. \qquad (5.69)$$

Заметим, что U_x есть единичная ступенчатая функция, равная нулю при $x<0$ и равная единице при $x>0$. Интегральный синус $\mathrm{Si}(x)$ определяется как

$$\int_0^x \frac{\sin y}{y}\, dy.$$

Заметим, что $\mathrm{Si}(-x) = -\mathrm{Si}(x)$. Кривая *1* на рис. 5.19 представляет преобразование первого сомножителя в выражении (5.69) для $G(l)$, кривая *2* — преобразование второго сомножителя, кривая *3* — преобразование произведения указанных сомножителей, равное свертке первых двух функций от z.

Символ L на рисунке отвечает символу l_M в тексте. Хотя $g(z)$ нигде не обращается в нуль, она локализована в окрестности начала координат. Размерность g обратна длине и нормализована так, чтобы интеграл от $g(z)$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, был равен 1. С целью ограничения пределов по ω введем функции

$$F(\omega) = \frac{\pi^2 \sin[\pi(|\omega| - \omega_0)/\omega_c]}{2\omega_c \,\mathrm{Si}(\pi)\,[\pi(|\omega| - \omega_0)/\omega_c]}$$

для $-\omega_0-\omega_c<\omega<-\omega_0+\omega_c$

или $\omega_0-\omega_c<\omega<\omega_0+\omega_c$ (5.70)

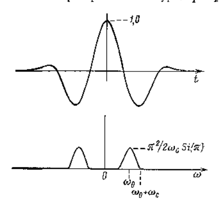
$$f(t) = \left[\frac{\mathrm{Si}(\omega_c t+\pi) - \mathrm{Si}(\omega_c t-\pi)}{2\,\mathrm{Si}(\pi)}\right] \cos\omega_0 t.$$

Функция $F(\omega)$ равна нулю вне указанного интервала. Эти функции показаны на рис. 5.20. Функция источника представляет симметричный импульс с максимумом при $t=0$, равным 1. Полезно иметь в виду, что $\mathrm{Si}(\pi)=1{,}8516$.

В качестве характеристики волнового поля мы выбрали радиальное смещение u_r, рассматривая его как выходной сигнал. Вначале задача решается для Фурье-преобразования выходного сигнала U_r, после чего выполняется численное обратное преобразование Фурье согласно намеченной выше схемы. Термин «выходная функция» будет означать спектр U_r, который определяется по

Рис 5.19 Форма распределенного источника скважины [191]

Рис 5.20. Зависимость источника от времени и ее преобразование Фурье [191]



формуле (5.66). Символы Re и Im обозначают вещественную и мнимую части спектра U_r.

Устранение сингулярностей. Полезно зафиксировать ω и рассматривать вещественную и мнимую части выходной функции U_r как функции переменной l. На рис. 5.21 показан пример для скважины в гипотетическом песчанике при $\rho=2{,}3$ г/см^3, $\alpha=4000$ м/с, $\beta=2300$ м/с, $b=10$ см. Частота равна 20 000 Гц. $l_M=1{,}5$ см$^{-1}$, $\Delta l=0{,}005$ см$^{-1}$. Вещественная и мнимая части выходной функции являются четными функциями от l, поэтому кривые показаны только для положительных l. Из рисунка видно, что вещественная часть Re стремится к бесконечности при $l=l_0$, поэтому суммирование равных приращений вдоль l не будет сходиться к интегралу по l. Позже мы обсудим численную схему, которая позволяет преодолеть данное затруднение. Просто отметим, что сингулярное поведение связано с обращением знаменателя в нуль при $l=l_0$ и что фазовая скорость $c=\omega/l_0$ совпадает с корнем уравнения (5.63). Можно увидеть, что c меньше β. Как показано на рис. 5.22, на низких частотах выходная функция довольно быстро

меняется, нигде не обращаясь в бесконечность. Было найдено, что некоторые из этих флуктуаций вызваны нулями знаменателя для некоторых комплексных волновых чисел a_0+il_0. Выразим знаменатель в правой части (5.66) в терминах комплексных величин $L=a+il$, подставив $a+il$ вместо il. Приравнивая нулю, получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(2L^2+\omega^2/\beta^2)^2}{M}\,\frac{K_0(Mb)}{K_1(Mb)}-\frac{2\omega^2}{b\beta^2}+4L^2K\,\frac{K_0(Kb)}{K_1(Kb)}=0,\\ &K=i\,(L^2+\omega^2/\beta^2)^{1/2},\quad M=i\,(L^2+\omega^2/\alpha^2)^{1/2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.71}$$

Выше определенной частоты этому уравнению удовлетворяют чисто мнимые значения L, а ниже имеются комплексные значения $L=a_0+il_0$, для которых фазовая скорость ($c=\omega/l_0$) выше ско-

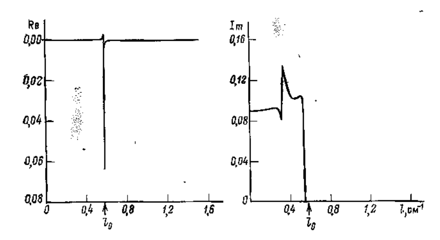


Рис 5.21 Выходная функция, подлежащая суммированию по l на частоте 20 кГц

рости поперечных волн β и, кроме того, наблюдается экспоненциальное ослабление $e^{-a_0 z}$.

При наличии сингулярности на оси l численное интегрирование по l при фиксированном ω не приведет к успеху, поскольку вся конечная сумма может оказаться значительно меньше единственного слагаемого для значения вблизи сингулярного значения l_0. Один из возможных подходов состоит в том, чтобы определить точку сингулярности l_0, в которой величина Re бесконечна, затем найти величину K_0 в выражении $K_0/(l-l_0)$, аппроксимирующем функцию Re в окрестности l_0, и вычесть $K_0/(l-l_0)$ из Re. Полученная гладкая кривая может быть численно проинтегрирована. Так как Re является четной функцией l, то при $l=-l_0$ знамена-

тель выходной функции также будет обращаться в нуль, поэтому сингулярность Re аппроксимируется выражением

$$\frac{K_0}{l-l_0}-\frac{K_0}{l+l_0}=\frac{2l_0 K_0}{l^2-l_0^2}. \qquad (5.72)$$

При l, близком к l_0, мнимая часть Im равна нулю. Как упоминалось выше, значение $c=\omega/l_0$ представляет собой фазовую скорость моды, отвечающей псевдорэлеевской волне. Амплитуда сингулярности K_0 выражает соответствующую возбуждающую силу для рассматриваемой комбинации источник — приемник. Фазовые скорости и значение K_0 изображены на рис. 5.23. Хотя спектр источника определен в интервале от 3 до 21 кГц, ниже 8,5 кГц не

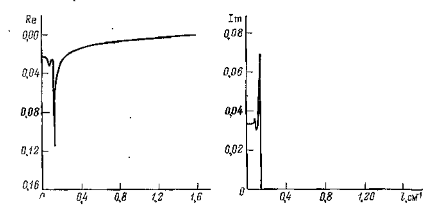


Рис. 5.22 Выходная функция, подлежащая суммированию по l на частоте 5 кГц

было обнаружено ни одной сингулярности. Как можно увидеть из рис. 5.17, частота среза отвечает ситуации, когда длина волны в 1,5 раза больше диаметра скважины, что соответствует в нашем случае частоте 7,7 кГц.

Из рис. 5.23 видно, что амплитуда сингулярности быстро падает в этом частотном диапазоне. Это указывает на определенную слабость данного метода локализации сингулярности. В частности, он не позволяет локализовать и устранить сингулярность в окрестности 7 кГц. На рис. 5.24 это проявляется в виде синусоиды с малой амплитудой и частотой около 7,7 кГц.

Показанный на рис. 5.24 вклад псевдорэлеевской волны был вычислен без численного суммирования по волновому числу. Вместо этого вещественная и мнимая части спектра на каждой частоте были определены по таблице преобразования Фурье [32], т. е. для каждой пары сингулярностей $\mathrm{Re}\,(\omega)=-K_0\sin(l_0 z)$ и $\mathrm{Im}\,(\omega)=-K_0\cos(l_0 z)$. После умножения на $G(l_0)$ и $F(\omega)$ суммирование по частоте выполнялось численно. В рассматриваемом случае $\omega_0=2\pi\cdot 12\,000$ Гц и $\omega_c=2\pi\cdot 9000$ Гц. Амплитуда сущест-

венно не зависит от расстояния, как и следовало ожидать для поверхностной волны, а изменение формы волны согласуется с дисперсией скорости, показанной на рис. 5.23. После вычитания сингулярности, гладкая выходная функция численно интегрировалась по волновому числу; полученный частотный спектр численно обращался. «Паразитные» колебания на частоте 8 кГц маскируют любую прямую продольную или поперечную волну. Добавление вклада объемных и псевдорэлеевской волн дает общее смещение, приведенное на рис. 5.25. Данная процедура локализации сингулярностей дает фазовую скорость и возбуждающую силу для

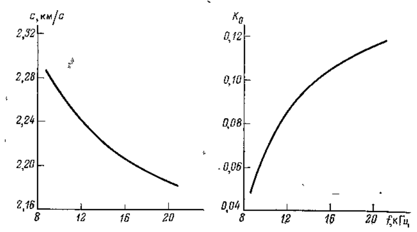


Рис 5.23 Фазовая скорость и возбуждающее усилие K_0 для псевдорэлеевской волны в полой скважине

Рис 5.24 Сейсмограммы псевдорэлеевских волн вдоль полой скважины

каждой моды волнового поля, которые и сами по себе могут представлять интерес в целом и отдельно. Метод успешно применяется и при определении вклада полезных объемных волн, хотя осцилляции на рис. 5.25 подчеркивают присущий ему недостаток.

Комплексная частота. Второй подход учета сингуляр-

ности связан с введением комплексной частоты $\omega - i\omega$ вместо ω в формуле (5.66). В этом случае при вещественных l сингулярностей не наблюдаются и при соответствующем выборе ω_1 выходная функция оказывается достаточно гладкой. Полученное после суммирования по ω волновое поле близко к $u_r(b, z, t)$ $e^{-\omega_1 t}$. Поэтому умножение на $e^{\omega_1 t}$ дает волновое поле, являющееся хорошей аппроксимацией для $u_r(b, z, t)$. На рис. 5.26 показано вычисленное таким способом волновое поле для тех же условий, что и выше. Ясно, что на радиальном смещении доминирует псевдорэлеевская волна, форма которой практически идентична волне на рис. 5.24. На времени 0,5 мкс и на расстоянии 200 см можно наблюдать слабую прямую продольную волну. Другой слабый сигнал вызван

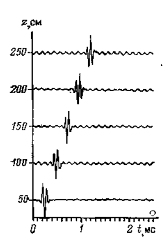


Рис 5.25 Теоретическая сейсмограмма полного радиального смещения в полой скважине, вычисленная способом устранения сингулярностей

Рис. 5.26. Теоретическая сейсмограмма радиального смещения в полой скважине, вычисленная с использованием комплексной частоты

псевдорэлеевской волной от ложных источников, расположенных через интервалы $2\pi/\Delta l$ вдоль скважины.

Поглощение в среде. Третий подход к решению проблемы сингулярности состоит в том, что окружающая скважину среда рассматривается как поглощающая. Один из способов состоит в замене α^2 на $\alpha^2(1+a+ib)$ и β^2 на $\beta^2(1+c+id)$, где a, b, c и d — функции от частоты, малые по сравнению с единицей. Для вязкоупругой среды в низкочастотном диапазоне $a=0$, $b=\omega M'/M$, $c=0$ и $d=\omega\mu'/\mu$. Для среды, в которой поглощение пропорционально частоте: $a_P=b_P|\omega|$, а $a_S=b_S|\omega|$, данные функции

$$
\begin{aligned}
&a=(4b_P\alpha/\pi)\ln(|\omega|/\omega_M),\\
&b=2b_P\alpha\,\mathrm{sgn}\,\omega,\\
&c=(4b_S\beta/\pi)\ln(|\omega|/\omega_M),\\
&d=2b_S\beta\,\mathrm{sgn}\,\omega
\end{aligned}
\qquad (5.73)
$$

Эти выражения могут быть выведены из формул (4.67) и (4.68). Считается, что α (или β) совпадает со скоростью на некоторой средней частоте ω_M и что рассматриваемый частотный диапазон, включая ω_M, находится на оси частот правее частоты ω_0, фигурирующей в (4.67) и (4.68). При этих условиях формула (4.68) переписывается как $1/c_P = 1/\alpha - (2b_P/\pi)\ln(|\omega|/\omega_M)$. Непосредственно из формулы (4.67) следует, что $a_P = b_P|\omega|$. Сопоставление этих соотношений с условием $a_P + i\omega/c_P = i\omega/\alpha(1+a+ib)^{1/2}$, дает функции (5.73). После указанных подстановок выходная функция (5.73) больше не содержит сингулярностей и интегральная сумма стремится к интегралу при $\Delta l \to 0$. Применение этого метода для анализа аппаратуры акустического каротажа иллюстрируется рис. 5.33.

Чисто крутильные движения

До сих пор мы обсуждали движение в плоскости Rz, используя скалярный потенциал Φ и одну компоненту векторного потенциала $\Psi_\theta = -\partial\gamma/\partial r$ [см. формулу (2.21)]. Оказывается, что перпендикулярное к плоскости Rz и не зависимое от θ движение требует только одной компоненты векторного потенциала, $\Psi_z = \chi$. В этом случае единственная компонента смещения совпадает с u_θ, а единственная компонента напряжения, действующая на стенки скважины, равна $p_{r\theta}$. Напишем аналогичные (5.41) и (5.42) соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &u_\theta = -\partial\chi/\partial r,\\ &e_{r\theta} = -\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, \quad e_{\theta z} = \partial u_\theta/\partial z.\\ &p_{r\theta} = \mu e_{r\theta}, \quad p_{\theta z} = \mu e_{\theta z}. \end{aligned}\right\} \tag{5.74}$$

Функция χ удовлетворяет скалярному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}. \tag{5.75}$$

Радиальная составляющая решения, получаемого методом разделения переменных, равна $I_0(Kr)$ или $K_0(Kr)$, где $K^2 = l^2 - \omega^2/\beta^2$. По аналогии с формулой (5.55) потенциал, который описывает волны, распространяющиеся от скважины, дается следующим выражением:

$$\chi = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} D(l,\omega)\,K_0(Kr)\,e^{ilz}\,e^{i\omega t}\,dl\,d\omega. \tag{5.76}$$

Предположим, мы имеем источник, представляющий приложенную по окружности касательную силу, преобразование Фурье которой по t и z равно $P_{r\theta}(b, l, \omega)$. Согласно формулам (5.74) и (5.76)

$$-\mu K^2[K_0(Kb) + 2K_1(Kb)/Kb]D(l,\omega) = P_{r\theta}(b, l, \omega). \tag{5.77}$$

Если смещение стенки скважины рассматривается как выходной сигнал, то

$$U_\theta\ (b,\ l,\ \omega) = KK_1(Kb)D(l,\ \omega). \tag{5.78}$$

Эти выражения не содержат сингулярностей, поэтому численное интегрирование выполняется без затруднений. Как и прежде, источник $P_{r\theta}(b,\ l,\ \omega)$ приравнивается правой части уравнения (5.68). Результирующее смещение показано на рис. 5.27 для той же скважины, что и на предыдущих рисунках. Единственный фиксируемый на сейсмограмме сигнал представляет прямую поперечную волну. Ее амплитуда убывает примерно как квадрат расстояния, т. е. достаточно быстро и потому сигналы от «ложных» источников не видны.

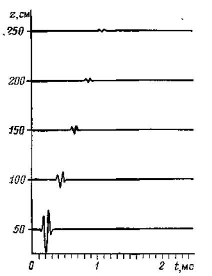


Рис. 5.27. Теоретическая сейсмограмма касательного смещения в полой скважине в песчанике

Изгибные волны

Главным условием, использовавшимся выше, была независимость всех величин от θ. Определение деформации в формулах (5.41) и связь деформаций с напряжением в формулах (5.42) справедливы и без него. Уравнение движения, эквивалентное уравнению (5.44), может быть выполнено, если смещения определяются всеми тремя скалярными потенциалами Φ, γ и χ:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r\,\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \\ u_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta\,\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial r}, \\ u_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \gamma}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.79}$$

Каждый потенциал должен удовлетворять скалярному волновому уравнению, например

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \tag{5.80}$$

Решение, получаемое методом разделения переменных, имеет экспоненциальную зависимость от θ в виде множителя $e^{N\theta}$. Поскольку приращение угла θ на 2π соответствует обходу вокруг скважины и возвращению в исходную точку, зависимость решения от θ должна быть периодической с периодом 2π. Таким образом, число N должно быть чисто мнимым и принимать целые значения, а потенциал пропорционален $e^{in\theta}$. Зависимость решения от радиуса дается множителем $K_n(Mr)$. Функции χ и γ также должны удовлетворять записанному выше скалярному волновому уравнению при замене α^2 на β^2. Следовательно, они пропорциональны $K_n(Kr)$.

Особый интерес представляют волны при $n=1$. По аналогии с движением тонкого стержня, описываемым такими же потенциалами, эти волны можно назвать изгибными (см. рис. 5.4). Полагая $n=1$ или $n=-1$, можно выбрать потенциалы, пропорциональные $\sin\theta$ или $\cos\theta$, и чтобы учесть вклады от всех трех потенциалов, выберем

$$\left.\begin{aligned} \Phi(r,\theta,l,\omega) &= A(l,\omega)\,K_1(Mr)\cos\theta,\\ \Gamma(r,\theta,l,\omega) &= B(l,\omega)\,K_1(Kr)\cos\theta,\\ X(r,\theta,l,\omega) &= C(l,\omega)\,K_1(Kr)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (5.81)$$

Каждое из этих выражений представляет собой двойное преобразование Фурье потенциалов Φ, γ и χ. Для простой скважины напряжения p_{rr}, $p_{r\theta}$ и p_{zr} следует положить равными нулю при $r=b$. Применяя формулы (5.79), (5.41), (5.42) к соотношениям (5.81), получим три выражения, содержащие амплитуды A, B и C. Если некоторые напряжения взяты как источники колебаний, то аналогично уравнениям (5.62) каждое из трех выражений следует приравнивать $P_{rr}(b, l, \omega)\cos\theta$, $P_{r\theta}(b, l, \omega)\sin\theta$ и $P_{zr}(b, l, \omega)\cos\theta$ соответственно. Матрица полученной системы из трех уравнений состоит из девяти элементов, каждый из которых представляет сложное выражение, содержащее функции Бесселя, аналогично четырем элементам матрицы системы уравнений (5.62). Учет источника и численное интегрирование проводятся так же, как и в осесимметричном случае. Пример вычисления изгибной волны от вибрирующего датчика дан ниже. В гл. 6 потенциалы Φ, γ и χ используются для вычисления излучения от сосредоточенной силы.

Поперечно-изотропная среда

Если ось симметрии поперечно-изотропной среды совпадает с осью скважины, то единственный дополнительный фактор, который необходимо учесть при описании осесимметричных волн, распространяющихся вокруг скважины, состоит в том, что (как и при описании плоских волн в поперечно-изотропной среде) решение уравнения движения является линейной комбинацией потенциалов Φ и ψ.

Вместо формул (5.61), справедливых для изотропной среды, будем иметь

$$\Phi(r,\ l,\ \omega)=AK_0(Mr)+bBK_0(Kr)$$
$$\Psi(r,\ l,\ \omega)=aAK_1(Mr)+BK_1(Kr). \qquad (5.82)$$

Величины M и K определяют по формулам (2.63), а a и b соответственно (2.61) и (2.62). Смещения через потенциалы попрежнему выражаются первыми тремя соотношениями из (5.56), а деформации через смещения — формулами (5.41). Однако напряжения с деформациями теперь связаны иначе. Вместо (5.42) имеем [156]:

$$\left.\begin{aligned} p_{rr} &= Ae_{rr}+(A-2N)e_{\theta\theta}+Fe_{zz},\\ p_{\theta\theta} &= (A-2N)e_{rr}+Ae_{\theta\theta}+Fe_{zz},\\ p_{zz} &= Fe_{rr}+Fe_{\theta\theta}+Ce_{zz},\\ p_{\theta z} &= Le_{\theta z},\ \ p_{zr}=Le_{zr},\ \ p_{r\theta}=Ne_{r\theta}.\end{aligned}\right\} \qquad (5.83)$$

Здесь наблюдается аналогия с соответствующими выражениями (2.58) в прямоугольных координатах. Используя выражения для p_{rr} и p_{rz}, получим уравнение, аналогичное (5.62), но с более сложными элементами. Использование этих соотношений при численном моделировании излучения от сосредоточенной силы в поперечно-изотропной среде приведено в гл. 6.

Конические объемные волны

Распространение волн вдоль пустой скважины совершенно аналогично явлению отражения плоских волн на свободной границе (см. гл. 2). В формулах (5.55) положим $l=-\omega/c$ аналогично тому, как это сделано в соотношениях (2.27). Если $|c|>\alpha$, то величина M является мнимой: $M=im$. Из уравнений (5.57) получаем: $K_0(imr)=-\frac{i\pi}{2}H_0^{(2)}(mr)$ и $H_0^{(2)}(mr)=I_0(mr)-iN_0(mr)$. В формуле (5.55) $I_0(imr)=I_0(mr)$, но можно также использовать комбинацию $H_0^{(1)}(mr)=I_0(mr)+iN_0(mr)$, поэтому скалярный потенциал

$$\Phi(r,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A_1(\omega)H_0^{(1)}(mr)+A_2(\omega)H_0^{(2)}(mr)]\,e^{-i\omega z/c}\,e^{i\omega t}\,d\omega.$$
$$m=\omega(1/\alpha^2-1/c^2)^{1/2}\ . \qquad (5.84)$$

Согласно (5.58), при больших значениях mr функция Ханкеля $H^{(1)}{}_0(mr)$ имеет асимптотику $(2/\pi mr)^{1/2}e^{i\pi/4}\,e^{imr}$. Присоединяя множитель $e^{i\omega t}$, получим волну, распространяющуюся в отрицательном радиальном направлении. Следовательно, вдали от скважины член, содержащий множитель $A_1(\omega)$, представляет падающую продольную волну с коническим фронтом равных фаз и слабым затуханием при увеличении r. Аналогично член, содержащий множитель $A_2(\omega)$, представляет коническую плоскую волну, рас-

пространяющуюся от скважины. Потенциал поперечной волны в (5.55) заменяется на

$$\Psi(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B_1(\omega) H_1^{(1)}(kr) + B_2(\omega) H_1^{(2)}(kr)] e^{-i\omega z/c} e^{i\omega t} d\omega, \quad (5.85)$$
$$k = \omega(1/\beta^2 - 1/c^2)^{1/2}.$$

Анализ поведения функций $H_1^{(1)}(kr)$ при больших аргументах показывает, что она описывает падающую, а $H_1^{(2)}(kr)$ — излучаемую поперечную волну. Если на некотором большом расстоянии от скважины ввести источник, генерирующий падающие конические волны, то величины $A_1(\omega)$ и $B_1(\omega)$ следует рассматривать как известные. Приравнивание нулю напряжений на стенке скважины даст два уравнения, необходимые для определения A_2 и B_2. Если, например, $B_1=0$, то отношение A_2/A_1 представляет собой коэффициент отражения для конических продольных волн.

ЗАПОЛНЕННАЯ ЖИДКОСТЬЮ СКВАЖИНА С ЖЕСТКОЙ СТЕНКОЙ

Для понимания волновых процессов в столбе жидкости рассмотрим цилиндр, имеющий радиус b и расположенный в абсолютно жесткой среде. Обозначим ρ' — плотность флюида и α' — скорость распространения продольных волн в нем. При описании движения жидкости нам понадобится один только потенциал Φ, определяемый первой из формул (5.55), в которой необходимо исключить слагаемое $K_0(M'r)$, стремящееся к бесконечности при $r \to 0$. Следовательно,

$$\Phi'(r, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A'(l, \omega) I_0(M'r) e^{ilz} e^{i\omega t} dl\, d\omega, \quad (5.86)$$
$$\Phi'(r, l, \omega) = A'(l, \omega) I_0(M'r).$$

Поскольку стенка скважины не перемещается, радиальное смещение флюида у стенки скважины отсутствует: $u_r(b, z, t)=0$. Его преобразование Фурье также равно нулю. Из формул (5.45) и (5.60) следует, что

$$U_r(b, l, \omega) = M'I_1(M'b)A'(l, \omega) = 0 \quad (5.87)$$

Коэффициент $A'(l, \omega)$ должен обращаться в нуль, если $M'I_1(M'b)$ конечно.

До тех пор, пока величина M' вещественна, $I_1(M'b)$ отлична от нуля. Следовательно, первое условие состоит в том, что $M'=0$. Из него следует условие, накладываемое на фазовую скорость c вдоль оси [ср. с формулой (5.63)]:

$$m' = |\omega| \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\alpha'^2}\right)^{1/2} = 0, \quad c = \alpha' \quad (5.88)$$

Это означает, что на любой частоте вдоль скважины могут распространяться волны, имеющие скорость продольных волн во

флюиде. Эти волны будем объединять термином «нулевая мода» (кривая c_0 на рис. 5.28).

Если величина M' чисто мнимая, то граничное условие (5.87) может быть записано так:

$$m' J_1(m' b) A'(l, \omega) = 0,$$

$$m' = \omega \left(\frac{1}{\alpha'^2} - \frac{1}{c^2} \right)^{1/2}. \quad (5.89)$$

При вещественных значениях x функция $J_1(x)$ осциллирует, имея нули при $x_0=0$, $x_1=3{,}83171$, $x_2=7{,}01559$, $x_3=10{,}17347$ и т.д.

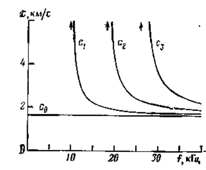


Рис 5.28. Фазовая скорость незатухающих волн в столбе жидкости с жесткой стенкой

[2]. Отвечающая n-му нулю фазовая скорость является функцией частоты:

$$c_n = \alpha' \left[1 - \left(\frac{x_n \alpha'}{\omega b} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (5.90)$$

Первые три моды изображены на рис. 5.28 для значения $\alpha' = 1650$ м/с и $b = 10$ см. Каждая мода имеет частоту среза, при приближении к которой фазовая скорость стремится к бесконечности. С ростом частоты каждая из мод стремится к α'.

МОДЕЛИ АКУСТИЧЕСКОЙ СКВАЖИННОЙ АППАРАТУРЫ

Много исследований по распространению волн вдоль заполненных флюидом скважин было предпринято с целью лучшего понимания поведения скважинной акустической аппаратуры при различных условиях. Вначале скважинный инструмент (зонд) идеализировался в виде жесткого цилиндра, а окружающая порода — как изотропная среда. Затем были созданы более реалистические модели, включающие описание зонда как упругого стержня, учет проницаемости окружающих пород, наличие поперечной изотропии пород, допущение о наличии границ или нарушений, пересекающих скважину. Ряд синтетических сейсмограмм рассчитывались с целью продемонстрировать преимущество новых видов аппаратуры. Несомненно, проведенные теоретические исследования оказали большое влияние на проекты и использование скважинной аппаратуры.

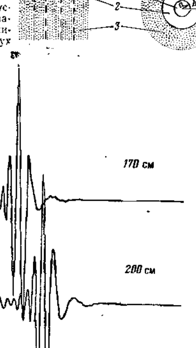
Устранение сингулярностей. Опубликованные Уайтом [180] сейсмограммы рассчитывались методом локализации и устранения сингулярностей, обсуждавшимися выше для пустой скважины. Идеализированная схема решаемой задачи показана на рис. 5.29. В дополнении к потенциалу в окружающей среде, который определяется формулой (5.61), необходимо еще учесть скалярный потенциал в кольцевой зоне между зондом и скважиной:

$$\Phi'(r,\ l,\ \omega)=A'(l,\ \omega)I_0(M'r)+B'(l,\ \omega)K_0(M'r). \qquad (5.91)$$

Соответствующие граничные условия выражают непрерывность радиального смещения в центральном стержне и непрерыв-

Рис. 5.29. Геометрия зонда и скважины. 1 — стержень; 2 — флюид; 3 — порода

Рис. 5.30. Сейсмограмма давления, обусловленного объемным источником в заполненной буровым раствором скважине, пробуренной в песчанике на двух расстояниях [180]



ность радиального смещения, нормального и касательного напряжений на стенке скважины. Применение формулы (5.56) к введенным потенциалам дает четыре уравнения. Датчик колебаний моделируется заданием некоторого (специально выбранного) распределения радиального смещения на центральном стержне при помощи функции $G(l)$, а также входного сигнала, характеризуемого спектром $F(\omega)$. Чтобы представить выходной сигнал в приемнике, используется акустическое давление на центральном стержне:

$$P(a,\ l,\ \omega)=\rho'\omega^2\Phi'(a,\ l,\ \omega). \tag{5.92}$$

Это выражение следует из формулы (5.56) при $\mu=0$ и определяет давление, равное взятому со знаком минус нормальному напряжению. Пример записи двумя приемниками, расположенными на расстояниях 170 и 200 см, показан на рис. 5.30. Радиус инструмента равен 5 см, радиус скважины 10 см. Флюид, помещенный в кольцо, представляет буровую жидкость с плотностью $\rho'=1{,}5$ г/см^3 и скоростью $\alpha'=1650$ м/с. Окружающие породы состоят из песчаника с параметрами $\rho=2{,}3$ г/см^3, $\alpha=4000$ м/с, $\beta=2300$ м/с. Форма сигнала в источнике показана на рис. 5.20, где $\omega_0=2\pi\cdot1200$ с$^{-1}$, и $\omega_c=2\pi\cdot9000$ с$^{-1}$. Слева на рис. 5.30 приведена шкала давлений при пиковом изменении объема источником на 1 см^3. Источником служит радиальное смещение на брусе, изменяющееся, как показано на рис. 5.19, на протяжении 5 см. Изменение объема определяется радиальным смещением, умноженным на окружность бруса и проинтегрированным от $-\infty$ до $+\infty$ по z. Первая волна на рис. 5.30 продольная. Она сильно осциллирует (по сравнению с входным сигналом) из-за многократного преломления в кольце, в котором содержится флюид. Вступление высокоамплитудного всплеска приходит приблизительно со скоростью поперечной волны. Более четкая поперечная волна видна на рис. 5.31. Все константы в этом примере те же, что и на рис. 5.30. Разница состоит в том, что величина n теперь равна 1 (вместо нуля), как и в уравнении (5.81). Радиальное смещение изменяется как $\cos\theta$, что моделирует источник типа «шейкер». В качестве выходного сигнала взято давление на брусе при $\theta=0$; оно тоже изменяется как $\cos\theta$. Эта модель вполне может быть применена к аппаратуре, показанной на рис. 5.4. Теоретические сейсмограммы содержат вступление, приходящее со скоростью поперечной волны. Самый большой импульс генерируется буровым раствором — это многократно-отраженная волна с антисимметрией, характерной для $n=1$.

Применение комплексной частоты. Некоторые авторы вводили комплексную частоту в выражение для выходной функции до суммирования по вещественной оси волновых чисел [34, 134, 162]. Цанг и Рейдер рассматривали критерии выбора мнимой части комплексной частоты и других параметров, необходимых для численного интегрирования. Вычисленная ими синтетическая трасса иллюстрирует вступление продольных и попереч-

ных волн в соответствии с ожидаемыми значениями для использованных литологических параметров. Начальная часть рассчитанной Цангом и Рейдером трассы сравнивается на рис. 5.33 с их результатом, полученным интегрированием вдоль другого пути. На рис. 5.32 трасса, вычисленная Цангом и Токсоуом, сравнивается с измеренной формой сигнала в известняках. Общее согласие графиков хорошее.

Учет поглощения. Если буровой раствор и окружающая среда являются поглощающими, выходная функция не имеет сингулярности на оси l и интегрирование по волновому числу может быть выполнено численно. В этом случае вводимые параметры

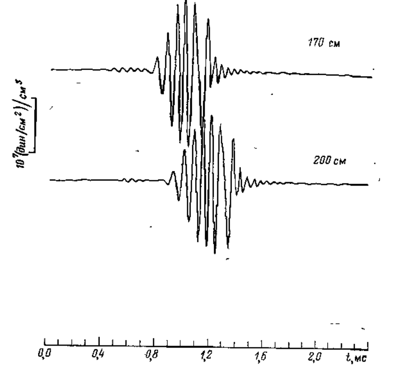
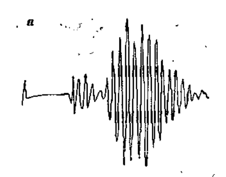


Рис. 5.31. Сейсмограмма давления при $\theta=0$ для источника типа «шейкер» в заполненной буровым раствором скважине, пробуренной в песчанике на двух расстояниях

непосредственно определяются поглощением и рассеянием в буровом растворе и твердой среде и, следовательно, имеют простой физический смысл. Замена интеграла суммой обусловливает появление мнимых источников [см. вывод формулы (5.67)]. На рис. 5.34 изображены результаты численных расчетов для следующих параметров: $a=5$ см, $b=10$ см, $\rho'=1,5$ г/см^3, $\alpha'=1650$ м/с, $\rho=2,3$ г/см^3, $\alpha=4000$ м/с, $\theta_P=0,01$, $\beta=2300$ м/с,



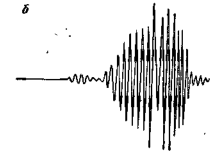


Рис 5 32. Сравнение экспериментальных (*а*) и теоретических (*б*) сейсмограмм для акустического каротажа в известняке [34]

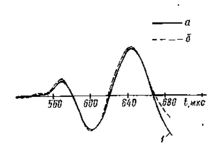


Рис. 5 33 Запись продольной волны, вычисленной с использованием комплексной частоты (*а*) и численным интегрированием вдоль разреза (*б*) [162].

1 — начало второй продольной волны

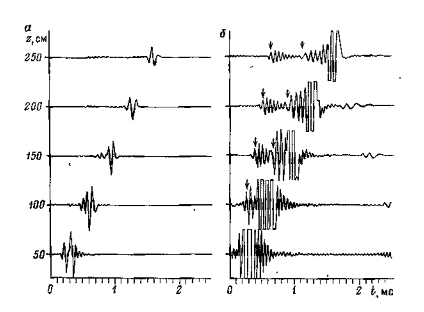


Рис. 5 34 Теоретическая сейсмограмма акустического каротажа в рыхлом песке (*а*) и она же с 15-кратным усилением (*б*)

$\theta_S=0{,}1$, $\omega_M=2400\pi c^{-1}$. Заметим, что $b_P=\theta_P/2\alpha$ и $b_S=\theta_S/2\beta$. Все параметры те же самые, что и использованные на рис. 5.30 при дополнительном предположении о поглощении и связанной с ним дисперсии скорости распространения волн в песчанике.

Все трассы на рис. 5.34,*а* даны в одном и том же масштабе амплитуд, максимальная амплитуда, равная $3{,}09\cdot10^8$ дин/см² на 1 см³, наблюдается на расстоянии 50 см. На рис. 5.34,*б* воспроизведены те же трассы, увеличенные в 15 раз.

Вступления волн на рис. 5.34,*б* указываются стрелкой. Время вступления и форма P-волны на расстоянии 200 см такие же, как и для продольной волны на рис. 5.30. Источник представляет центр расширения с максимумом при $t=0$. Расширение создает положительное давление в кольце флюида, которое образует давление в окружающей среде. Волна давления распространяется в среду и преломляется обратно во флюид в виде положительного импульса давления. Поэтому мы считаем положительный пик сигнала как вступление «непричинной» $\bar{P}$-волны. Простая формула, учитывающая преломление лучей при распространении через низкоскоростной слой, дает время вступления продольной волны:

$$t_P=\frac{z}{\alpha}+\frac{2(b-a)}{\alpha'}\left(1-\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}. \qquad (5.93)$$

Отмеченные на записях времена хорошо согласуются временами, вычисленными по этой формуле. Волна P представляется сильно осциллирующим сигналом по сравнению с сигналом в источнике с доминирующей частотой около 17 кГц. Эта частота соответствует наинизшей частоте волны, испытывающей конструктивную интерференцию при многократной рефракции. Если определить критический угол как $\gamma_c=\arcsin(\alpha'/\alpha)$, то расстояние, проходимое волной во флюиде, равно $(b-a)/\cos\gamma_c$, и время распространения ее к центральному стержню и обратно равно $2(b-a)/\alpha'\cos\gamma_c$. Расстояние вдоль оси равно $2(b-a)\operatorname{tg}\gamma_c$. Таким образом, P-волна проходила бы это расстояние в твердом теле за время $2(b-a)\operatorname{tg}\gamma_c/\alpha$. Для любой спектральной компоненты пространственный резонанс наблюдается тогда, когда разность времен прохождения волны через флюид и в твердом веществе кратная периоду. Это условие можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{n}{f_n}=\frac{2(b-a)}{\alpha'}\left(1-\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}, \qquad (5.94)$$

где n — целом число, а f_n — частота волны, испытывающей конструктивную интерференцию.

В рассматриваемом случае наинизшая возможная частота равна 18 кГц, а более высокие частоты лежат вне спектра источника. Стрелки на рис. 5.34,*б* также указывают на вступление S-волн. Вступление центрального пика отмечается экстремумом обратной полярности, что связано с присущим поперечной волне обращением фазы. Положительное расширение в источнике при

$t=0$ заставляет скважину расширяться, возбуждая поперечную волну с направленным во вне радиальным смещением. При ее распространении вдоль оси z она преломляется обратно во флюид в виде импульса отрицательного давления. Следовательно, при конструктивной интерференции время распространения во флюиде вдоль наклонного луча должно обеспечивать запаздывание прямой поперечной волны на нечетное число полупериодов. Это условие записывается так:

$$\frac{(2n-1)}{2f_n} = \frac{2(b-a)}{\alpha'}\left(1-\frac{\alpha'^2}{\beta^2}\right)^{1/2}. \qquad (5.9)$$

Наинизшая частота для поперечной волны равна 12 кГц, а более высокие частоты также лежат вне спектра источника, что согласуется с осциллирующим сигналом поперечной волны на рис. 5.34. На рис. 5.30 поперечная волна маскируется присутствием волн давления, обусловленных многократно-отраженными высшими модами в столбе бурового раствора. Из этого сравнения можно заключить, что учет поглощения приводит к подавлению этих мод по сравнению с модой нулевого порядка, т. е. трубной волной.

Лучевые разложения. Из предыдущих разделов ясно, что полное волновое поле при акустическом каротаже можно получить численным интегрированием по частоте и волновому числу, если используется комплексная частота или затухание, или вклад нормальных мод в полное волновое поле оценивается по сингулярностям подынтегрального выражения без численного интегрирования по волновому числу. С целью оценки вклада продольных и поперечных волн в полное волновое поле подынтегральное выражение может быть разложено в степенной ряд, каждый член которого связан с некоторым лучом. В работе [133] приведено общее выражение для волнового поля, складывающегося из первых вступлений волн P и S и из вторых вступлений, а именно многократно-рефрагированных волн, в случае когда источники и приемники расположены на оси скважины, заполненной жидкостью. Был сделан вывод, что первое вступление продольной волны затухает приблизительно как $1/z$, а поперечная волна как $1/z^2$. Цанг и Рейдер [162] также использовали лучевое разложение, оценив главный член уравнения для продольной волны численным интегрированием вдоль разреза комплексной плоскости волновых чисел. Из рис. 5.33 видно, что этот результат хорошо согласуется с начальной частью полного волнового поля, вычисленного при использовании комплексной частоты и интегрирования вдоль вещественной оси. Как утверждают Цанг и Рейдер этот результат значительно отличается от асимптотического разложения, полученного Роувером и др. [133]. Янг [200] при оценке членов лучевого разложения применил метод Каньяра, получив волновое поле, которое находится в соответствии с результатами численного интегрирования.

Учет особенностей реальных сред

Представление скважинного инструмента в виде однородного цилиндра неограниченной длины, а окружающих пород в виде изотропного упругого тела ведет к идеализированной модели, которая может рассматриваться как отправной пункт к более реалистическому описанию. Ниже кратко обсуждается ряд более сложных моделей, описанных в литературе.

Проницаемость пород. Розенбаум [134] рассмотрел породу, окружающую флюидозаполненную скважину, в рамках теории Био, учитывающей колебательные движения флюида в проницаемой породе, и получил решение для отклика инструмента на импульс давления. При численном интегрировании он использовал комплексную частоту. Им был сделан вывод, что затухание волны (распространяющейся вдоль скважины и вызванной движением флюида внутри среды Био) слишком мало, чтобы его можно было оценить по рассчитанному отклику. Часть полного волнового поля, которая наиболее подвержена влиянию проницаемости, представляет собой волновой цуг, распространяющийся примерно со скоростью трубной волны. Если предположить, что стенка скважины покрыта тонкой коркой затвердевшего раствора, которая препятствует движению флюида через границу, то вычисленное волновое поле совершенно не зависит от проницаемости породы.

Поглощение и дисперсия. Если порода, окружающая скважину, является поглощающей, а жидкость вязкой, то выходная функция не имеет сингулярности при вещественных волновых числах и интегрирование по l может быть выполнено численно. Этот подход физически привлекателен, поскольку относительное затухание, вычисленное для объемных волн и нормальных мод, непосредственно связано с предполагаемыми параметрами поглощения. В примере, показанном на рис. 5.33, пиковые амплитуды продольных волн считывались с выхода компьютера в интервале от 100 до 275 см с шагом в 25 см. Аппроксимация затухания выражением $e^{-a_P z}/z$ дает для a_P значение 0,00124 см$^{-1}$. При $\theta_P=0{,}01$ и $\alpha=4000$ м/с численное значение $\theta_P\omega/2\alpha$ на частоте 17 кГц равно 0,00134 см$^{-1}$. Таким образом, вычисленное волновое поле характеризуется разумным значением затухания. Этот подход, возможно, заслуживает большего внимания, чем ему было уделено в литературе.

Анизотропия. Как указывалось в гл. 3, осадочные породы часто могут быть адекватно представлены как тонкослоистые. Такие среды в диапазоне длин волн сейсмической разведки ведут себя как поперечно-изотропные. Эта точка зрения часто менее оправдана в отношении коротких длин волн, используемых в акустическом каротаже, но, по крайней мере, некоторые сланцы анизотропны в малом объеме. Некоторая степень анизотропии в породах с нелинейным поведением может быть вызвана и нагрузкой вышележащих пород. Ось симметрии в этом случае направлена

по вертикали. Соответствующие волновые поля детально описывались Тонгтаоу [161], а также Уайтом и Тонгтаоу [189]. Соответствующие потенциалы в твердой среде определяются формулой (5.82). Потенциал для флюида и выходная функция давления такие же, что и при измерениях в изотропной среде. При численном интегрировании функции давления могут использоваться те же методы решения. Тонгтаоу указал, что рефрагированная продольная волна имеет скорость вертикально распространяющейся плоской продольной волны, определяемой выражением $(c/\rho)^{1/2}$. Преломленная поперечная волна имеет скорость вертикально распространяющейся плоской поперечной S-волны, равную $(L/\rho)^{1/2}$. Амплитуда продольных волн уменьшается как z^{-1}, а поперечная волна затухает как z. Для колебательной моды ($N=1$) справедливо обратное: P-волна затухает как z^{-2}, а S-волна как z^{-1}.

Границы слоев и трещины. Простая неоднородная среда состоит из нескольких однородных слоев с плоскими границами, перпендикулярными к скважине. С целью моделирования трещиноватого нефтяного резервуара целесообразно рассмотреть одну или более флюидозаполненных трещин, пересекающих скважину и ограниченных плоскостями, перпендикулярными к оси скважины. Эта модель используется для описания изолированных трещин в гранитном массиве, рассматриваемом как возможное хранилище радиоактивных отходов [113]. Если встречается любое подобное изменение свойств, то использовавшийся ниже метод Фурье не позволяет удовлетворить дополнительным граничным условиям. Возможный подход состоит в том, чтобы считать параметры ρ, λ и μ функциями координат. В случае аксиальной симметрии уравнение движения в терминах радиального и аксиального смещения, эквивалентные уравнению (5.44), записываются в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial r}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r}\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial(\lambda u_r)}{\partial r}-\frac{\lambda\mu}{r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+ \\
+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{2\mu}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \qquad (5.96) \\
\frac{\partial}{\partial z}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial(\lambda u_r)}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)+ \\
+\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)+\frac{\mu}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.
\end{gathered}$$

Замена производных (в 5.96) центрированными разностями ведет к гетерогенной конечно-разностной схеме, позволяющей вычислять смещение. Можно представить, что типичный клиноподобный сектор разделяется на элементарные сегменты с размерами Δr, $\Delta\theta$ и Δz. Как и в приведенных выше примерах, источник вводится в виде зависимого от времени радиального смещения центрального стержня радиуса a. Затем смещение всех точек модели вычисляется через интервал времени Δt, после чего могут

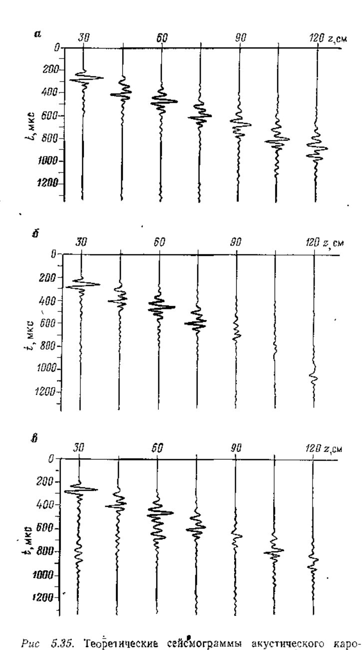


Рис 5.35. Теоретические сейсмограммы акустического каротажа, вычисленные по конечно-разностной схеме (по материалам К Бхасавани).

а — для однородного песчаника; *б* — для песчано-глинистых пород; *в* — для пород с открытой трещиноватостью

быть вычислены давления на стержень или любой другой выходной сигнал. На рис. 5.35 приведены сейсмограммы, вычисленные по этой схеме. В случае однородного песчаника волновое поле хорошо согласуется с соответствующим волновым полем, полученным с помощью преобразования Фурье. Наличие границы песка и сланца на отметке 75 см сказывается в изменении наклона каждой проходящей волны и заметном уменьшении амплитуды проходящей трубной волны (рис. 5.35,*б*). Отражение трубной волны от заполненной буровым раствором открытой трещины на глубине 75 см видно на рис. 5.35,*в*. Амплитуда проходящей волны сильно уменьшена по сравнению с амплитудой волны для однородного песчаника. Конечно-разностную схему можно адаптировать к имеющей осевую симметрию анизотропии. Ясно также, что этой схемой можно моделировать установку, имеющую конечную длину или неоднородные свойства.

Глава 6

ИСТОЧНИКИ И ПРИЕМНИКИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

ВВЕДЕНИЕ

Поле излучаемых сейсмических волн может быть очень сложным вследствие влияния геометрии источника, пустот и других границ в окрестности источника. Изучение простейших источников в безграничной среде дает основу для понимания тех факторов, которые влияют на излучение сейсмической энергии в более сложных ситуациях. Например, решение задачи для точечного источника позволяет получить оценку расстояния, на котором излучающаяся часть поля доминирует над волновыми процессами в ближней зоне. Эта оценка применима и при исследовании более сложных источников. Интересно также выяснить, может ли конкретный источник, размеры которого достаточно малы, быть аппроксимирован простейшим источником в безграничной среде. Например, ниже будет показано, что давление, действующее на коротком участке бесконечной цилиндрической полости, не совпадает с точечным источником даже в пределе, когда диаметр цилиндра стремится к нулю, а давление, прилагаемое к стенкам сферической полости, эквивалентно простому источнику. Много работ по механизму очага землетрясений связано с поиском простых источников, которые дают такое же распределение напряжений, как и наблюдаемые при землетрясениях. Подобные исследования оправдывают тщательное изучение поведения среды при воздействии сосредоточенных сил и их комбинаций до того, как перейти к более реалистическим моделям источников упругих волн.

Аналогично можно рассматривать такие простые характеристики сейсмических волн, как скорость частиц или нормальное напряжение, отложив исследование инструментов, использующихся при фактическом измерении сейсмических колебаний. Естественно предположить, что при регистрации продольных волн в присутствии шума следует непосредственно измерять расширение, а измерение вращения целесообразно при регистрации поперечных волн. Чтобы получить одновременно и время и направление прихода продольной волны, целесообразно использовать произведение скорости частиц и нормального напряжения или интенсивность. Различными авторами предлагались и другие нелинейные комбинации характеристик движения среды. Учитывая, что почти все измерения сейсмических волн дают скорость движения частиц (возможно, вдоль трех перпендикулярных направлений), мы также рассмотрим попытки измерения других характеристик сейсмических волн и их комбинации. Ключевым моментом исследования

является оценка влияния, которое регистрирующее устройство оказывает на волновое поле. Другим важным моментом является оценка надежности, с которой данный приемник реагирует на одну и только одну характеристику поля.

СОСРЕДОТОЧЕННАЯ СИЛА В БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ

Если сила с амплитудой G и временной зависимостью $g(t)$ действует в начале координат в направлении x, то три компоненты смещения частиц выражаются следующим образом [95]:

$$
\left.
\begin{aligned}
u_x &= \frac{G}{4\pi\rho}\left\{\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2}\int\limits_{r/\alpha}^{r/\beta} t'\, g(t-t')\,dt + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \times\right.\\
&\times\left[\frac{1}{\alpha^2}\, g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)-\frac{1}{\beta^2}\, g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right]+\left.\frac{1}{r\beta^2}\, g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right\},\\
u_y &= \frac{G}{4\pi\rho}\left\{\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial y^2}\int\limits_{r/\alpha}^{r/\beta} t'\, g(t-t')\,dt' +\right.\\
&+\left.\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial r}{\partial y}\left[\frac{1}{\alpha^2}\, g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)-\frac{1}{\beta^2}\, g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right]\right\},\\
u_z &= \frac{G}{4\pi\rho}\left\{\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z^2}\int\limits_{r/\alpha}^{r/\beta} t'\, g(t-t')\,dt' +\right.\\
&+\left.\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial r}{\partial z}\left[\frac{1}{\alpha^2}\, g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)-\frac{1}{\beta^2}\, g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right]\right\},
\end{aligned}
\right\}
\quad (6.1)
$$

где $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$.

В силу симметрии относительно x выражение для смещений можно сделать более понятным, если перейти к сферической системе координат r, θ, φ с полярной осью, совпадающей с осью x. В этом случае угол φ равен углу между положительным направлением оси x и радиальной координатой. Тогда из (6.1) следует

$$
\left.
\begin{aligned}
u_r &= \frac{G\cos\varphi}{4\pi\rho r}\left[\frac{2}{r^2}\int\limits_{r/\alpha}^{r/\beta} t'\, g(t-t')\,dt' + \frac{1}{\alpha^2}\, g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\right],\\
u_\theta &= 0,\\
u_\varphi &= -\frac{G\sin\varphi}{4\pi\rho r}\left[\frac{1}{r^2}\int\limits_{r/\alpha}^{r/\beta} t' g(t-t')\,dt' - \frac{1}{\beta^2}\, g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right].
\end{aligned}
\right\}
\quad (6.2)
$$

Видно, что радиальная компонента смещения содержит слагаемое, которое пропорционально $g(t-r/\alpha)$, следовательно имеет ту же форму сигнала, что и сила в источнике, и распространяется со скоростью продольных волн. Касательное смещение содержит слагаемое, пропорциональное $g(t-r/\beta)$, с той же формой сиг-

нала и со скоростью распространения поперечных волн. Интеграл, фигурирующий в каждой из двух компонент смещения, также может быть выражен через сумму волн, распространяющихся со скоростью продольных или поперечных волн. Если обозначить

$$\int_{-\infty}^{t} g(t')dt' = g^{\mathrm{I}}(t),$$

$$\int_{-\infty}^{t} g^{\mathrm{I}}(t')\,dt' = g^{\mathrm{II}}(t),$$

то интегрирование по частям дает:

$$\int_{r/\alpha}^{r/\beta} t'\, g(t-t')\, dt' = \frac{r}{\alpha}\, g^{\mathrm{I}}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) - \frac{r}{\beta}\, g^{\mathrm{I}}\left(t-\frac{r}{\beta}\right) + g^{\mathrm{II}}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) - g^{\mathrm{II}}\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \tag{6.3}$$

Подставляя (6.3) в (6.2), получим следующие выражения для радиальных и касательных смещений, возникающих при наличии сосредоточенной силы, действующей в направлении $\varphi=0$:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{G\cos\varphi}{4\pi\rho r}\left[\frac{1}{\alpha^2}\, g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) + \frac{2}{r\alpha}\, g^{\mathrm{I}}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{2}{r^2}\, g^{\mathrm{II}}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) - \frac{2}{r\beta}\, g^{\mathrm{I}}\left(t-\frac{r}{\beta}\right) - \frac{2}{r^2}\, g^{\mathrm{II}}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right], \\ u_\varphi &= \frac{G\sin\varphi}{4\pi\rho r}\left[\frac{1}{r\alpha}\, g^{\mathrm{I}}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{r^2} g^{\mathrm{II}}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{r\beta}\, g^{\mathrm{I}}\left(t-\frac{r}{\beta}\right) - \frac{1}{r^2}\, g^{\mathrm{II}}\left(t-\frac{r}{\beta}\right) - \frac{1}{\beta^2}\, g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right]. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Смещения, связанные с интегралом, убывают быстрее, чем $1/r$, поэтому на больших расстояниях u_r и u_φ имеют ту же зависимость от времени, что и сила в источнике. Но на коротких расстояниях роль однократного и двухкратного интегралов от $g(t)$ может быть заметной. Все три сигнала показаны на рис. 6.1 для $g(t)$ в виде однопериодного импульса длительностью P. В этом случае длина волны равна αP. На рис. 6.2 даны обе компоненты смещения на двух профилях — вдоль направления действия силы ($\varphi=0$) и в перпендикулярном направлении $\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$ в зависимости от безразмерного времени $T=t/P$ и безразмерного радиального расстояния $R=r/\alpha P$. В направлении действия силы продольная волна сильно искажена и, кроме того, на радиальной компоненте наблюдается волна, которая распространяется со скоростью поперечных волн и заметна на расстоянии в пять длин волн от источника. Аналогично касательная компонента содержит

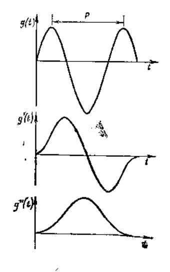


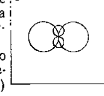
Рис. 6.1. Составляющие смещения для функций в источнике $g(t)$

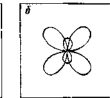
Рис. 6.2. Радиальные и касательные смещения на пяти расстояниях от сосредоточенной силы для направлений φ, равных 0 и 90°

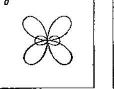
волну, которая распространяется в направлении, перпендикулярном к направлению действия силы, со скоростью продольных волн. Форма поперечной волны меняется при удалении от источника по мере того, как меняется пропорция всех трех составляющих g, g^{I} и g^{II}. На промежуточных углах $0<\varphi<\pi/2$ радиальное смещение умножается на $\cos\varphi$, а касательное смещение умножается на $\sin\varphi$.

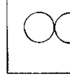
Если расстояние достаточно велико, ближним полем (т. е. членами, содержащими g^{I} и g^{II}) можно пренебречь и тогда смещение, излучаемое сосредоточенной силой, выразится так:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{G\cos\varphi}{4\pi\rho\alpha^2 r}\, g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right),\\ u_\theta &= 0,\quad u_\varphi = -\frac{G\sin\varphi}{4\pi\rho\beta^2 r}\, g\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$







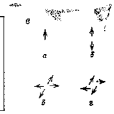


Рис 6.3. Диаграммы направленности для различных источников в плоскости, содержащей полярную ось

Зависимость этих смещений от угла для среды с коэффициентом Пуассона, равным 1/4 (т. е. для $\alpha^2/\beta^2=3$), показана на рис. 6.3,*а*. Амплитуда поперечной волны в направлении, перпендикулярном к силе, в 3 раза больше амплитуды продольной волны в направлении, совпадающем с действующей в источнике силой. Смещения имеют осевую симметрию относительно вертикальной оси.

КОМБИНАЦИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

Две сосредоточенные силы, разделенные малым расстоянием $2h$ и действующие в противоположных направлениях вдоль соединяющей их линии, представляют, по-видимому, простейшую комбинацию сосредоточенных сил. Эта комбинация сил называется двойной силой без момента. Если силы действуют в направлении полярной координаты (как показано на схеме рис. 6.3,*е*), то смещения в дальней зоне выразятся так:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{2hG\cos^2\varphi}{4\pi\rho\alpha^3 r}\, g'\left(t-\frac{r}{\alpha}\right),\\ u_\theta &= 0,\quad u_\varphi = -\frac{2hG\sin\varphi\cos\varphi}{4\pi\rho\beta^3 r}\, g'\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6.6)$$

Форма излучаемого сигнала совпадает с первой производной от сигнала в источнике. Относительные амплитуды поперечных и продольных волн, а также их зависимость от угла φ изображены на рис. 6.3,*б*. При $\alpha^2/\beta^2=3$ максимальная амплитуда поперечных волн в $3\sqrt{3}/2$ раз больше максимальной амплитуды продольной волны.

Другой источник, представляющий интерес, может быть представлен как две взаимно перпендикулярные двойные силы без момента с ориентацией сил, показанной на схеме 6.3,*е*. Для этой комбинации четырех радиально направленных в экваториальной плоскости сил излучаемые компоненты смещения имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{2h\,G\sin^2\varphi}{4\pi\rho\alpha^3 r}\,g'\left(t-\frac{r}{\alpha}\right),\\ u_\theta &= 0,\quad u_\varphi=\frac{2hG\sin\varphi\cos\varphi}{4\pi\rho\beta^3 r}\,g'\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Характеристика направленности этого типа источника представлена на рис. 6.3,*в*.

Комбинация из шести сосредоточенных сил (рис. 6.3,*д*), состоящая из трех двойных сил без момента, действующих вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, может быть названа центром расширения. Поперечные волны в этом случае не излучаются, а продольные волны имеют сферическую симметрию. Для центра расширения компоненты

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{2hG}{4\pi\rho\alpha^3 r}\,g'\left(t-\frac{r}{\alpha}\right),\\ u_\theta &= 0,\quad u_\varphi=0. \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Комбинация сил, схематически изображенная на рис. 6.4,*а*, может быть названа двойной силой с моментом, или парой сил. Излучающиеся компоненты, обязанные этому источнику, даются следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{2hG\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi}{4\pi\rho\alpha^3 r}\,g'\left(t-\frac{r}{\alpha}\right),\\ u_\theta &= -\frac{2hG\sin^2\theta\sin\varphi}{4\pi\rho\beta^3 r}\,g'\left(t-\frac{r}{\beta}\right),\\ u_\varphi &= \frac{2hG\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{4\pi\rho\beta^3 r}\,g'\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Хотя эти выражения относительно просты, осевая симметрия отсутствует, а диаграмма направленности имеет очень сложную форму.

Если две пары сил скомбинированы в плоскости, перпендикулярной к полярной оси (рис. 6.3,*г*), то компоненты смещения опять имеют осевую симметрию:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= 0, \\ u_\theta &= -\frac{2hG\sin\varphi}{4\pi\rho\beta^3 r}\, g'\left(t-\frac{r}{\beta}\right), \\ u_\varphi &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (6.10)$$

В этом случае излучается только поперечная волна, характеристика направленности которой изображена на рис. 6.3,*г*.

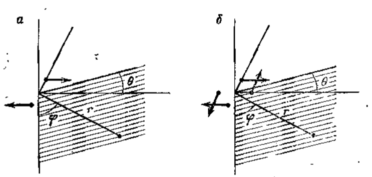


Рис. 6.4. Два источника, связанных со сферическими координатами.
а — пара сил; *б* — двойная пара без момента

Две пары сил эквиваленты также двойной силе без момента. Эта комбинация изображена на рис. 6.4,*б*. Компоненты смещения для этого типа источника выражаются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{2hG\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi}{2\pi\rho\alpha^3 r}\, g'\left(t-\frac{r}{\alpha}\right), \\ u_\theta &= \frac{2hG(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin\varphi}{4\pi\rho\beta^2 r}\, g'\left(t-\frac{r}{\beta}\right), \\ u_\varphi &= \frac{2hG\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{2\pi\rho\beta^3 r}\, g'\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \end{aligned}\right\} \quad (6.11)$$

СОСРЕДОТОЧЕННАЯ СИЛА В ПОПЕРЕЧНО-ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Общие сведения

Мы уже рассматривали распространение волн вокруг цилиндрической полости в терминах потенциалов смещения, а также процедуру двумерного преобразования по l и ω, которая используется здесь для вычисления смещения, вызванного касательным (к стенке скважины) напряжением, направленным вдоль оси сква-

жины, диаметр которой стремится к нулю, что эквивалентно сосредоточенной силе [184]. Численное интегрирование позволяет определить смещения в ближней зоне.

Потенциалы даны формулами (5.61), а напряжения — формулами (5.62) (заметим, что r здесь означает радиальную цилиндрическую координату, тогда как в предыдущем разделе r использовалось для обозначения радиальной сферической координаты). Когда радиус скважины b стремится к нулю, функции Бесселя заменяются их асимптотическими выражениями (5.59), после чего уравнения (5.62) могут быть упрощены:

$$(2\rho\beta^2/b^2)A+(2\rho\beta^2il/Kb^2)B=0,$$
$$(-2\rho\beta^2il/b)A+[\rho\beta^2(l^2+K^2)/Kb]B=P_{zr}(b,\ l,\ \omega). \qquad (6.12)$$

В первом равенстве слагаемым, содержащим $2\rho\beta^2/b^2$, можно пренебречь. Из второго уравнения видно, что P_{zr} должно быть пропорциональным $1/b$. Это означает существование силы F_z, не зависящей от диаметра скважины, когда радиус становится малым. Функция $g(z)$ из уравнения (5.69) представляет функцию, интеграл от которой равен единице. Если F_z есть общая сила, то $F_zg(z)$ **представляет силу на единицу длины, а $F_zg(z)/2\pi b$ на единицу длины площади, или касательное напряжение.** Следовательно, можно представить силу, действующую в положительном направлении оси z, во временной и спектральной областях:

$$p_{zr}(b,\ z,\ t)=(-F_z/2\pi b)g(z)f(t),$$
$$p_{zr}(b,\ l,\ \omega)=(-F_z/2\pi b)G(l)F(\omega) \qquad (6.13)$$

При подстановке его в (6.12) получим

$$\left.\begin{aligned} A &= \left(\frac{il}{K^2-l^2}\right)\left(\frac{F_zG(l)F(\omega)}{2\pi\mu}\right), \\ B &= \left(\frac{-K}{K^2-l^2}\right)\left(\frac{F_zG(l)F(\omega)}{2\pi\mu}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6.14)$$

Считая r радиальной цилиндрической координатой и учитывая **формулы (5.56) и (5.61), получим**

$$U_r(r,\ l,\ \omega)=-MAK_1(Mr)-ilBK_1(Kr),$$
$$U_z(r,\ l,\ \omega)=ilAK_0(Mr)-KBK_0(Kr). \qquad (6.15)$$

Эти равенства численно интегрировались, в результате чего были получены компоненты смещения $u_r(r,\ z,\ t)$ и $u_z(r,\ z,\ t)$ в цилиндрической системе координат. По этим компонентам затем **определялись смещения $u_r(r,\ \varphi,\ t)$ и $u_\varphi(r,\ \varphi,\ t)$ в сферической системе координат. На рис. 6.5 приведены результаты вычислений** для следующих параметров: $\rho=2{,}3$ г/см^3, $\alpha=4000$ м/с, $\beta=$

$=2300$ м/с, $l_M=600$ км$^{-1}$, $\Delta l=0{,}3$ км$^{-1}$, $\omega_0=2\pi\cdot 40$ рад/с, $\omega_c=2\pi\cdot 30$ рад/с, $\Delta\omega=2\pi\cdot 2$ рад/с, $r=1$ км, $\varphi=1$; 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80 и 90°. Пиковая частота равняется 40 Гц, соответствующие ей длины волн равны 100 м для P-волн и 57,5 м для S-волн. Эффективная длина источника (равная $2\pi/l_M=10$ м) составляет малую долю длины волны, хотя источник не эквивалентен точечному. Расстояние до ближайшего мнимого источника (возникающего из-за дискретизации частот) равно $2\pi/\Delta l=20{,}94$ км, что на-

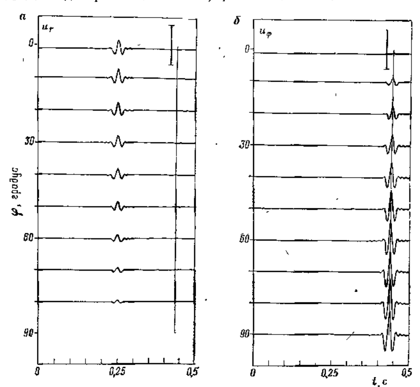


Рис. 6.5 Радиальное (*а*) и касательное (*б*) смещения, обусловленные сосредоточенной силой в песчанике. Вертикальная черта показывает величину 10^{-17} см/дин

много больше используемых расстояний от центрального источника. Приведенные на рис. 6.5 смещения соответствуют смещениям, вычисленным по уравнению (6.5) для сосредоточенной силы.

Поперечно-изотропная среда

Описанную в предыдущем разделе процедуру можно применить к исследованию излучения сейсмических волн в поперечно-изотропной среде от сосредоточенной силы, направленной вдоль оси анизотропии, совпадающей в осью z. Как и в случае плоской вол-

ны, решение уравнения движения является линейной комбинацией скалярных потенциалов φ и ψ [см. формулу (5.82)]:

$$\Phi = AK_0(Mr) + bBK_0(Kr),$$
$$\Psi = BK_1(Kr) + aAK_1(Mr). \quad (6.16)$$

В этих формулах M, K, a и b — те же, что и в формулах (2.61), (2.62) и (2.63). Устремив радиус b к нулю, получим

$$\left.\begin{aligned} A &= \left(\frac{il + bK}{K\Delta}\right)\left(\frac{F_z G(l) F(\omega)}{2\pi L}\right), \\ B &= -\left(\frac{M + ila}{M\Delta}\right)\left(\frac{E_z G(l) F(\omega)}{2\pi L}\right), \end{aligned}\right\} \quad (6.17)$$

где

$$\Delta = \frac{M(K^2 - l^2) + abK(l^2 - M^2) + ila(K^2 - M^2)}{MK}.$$

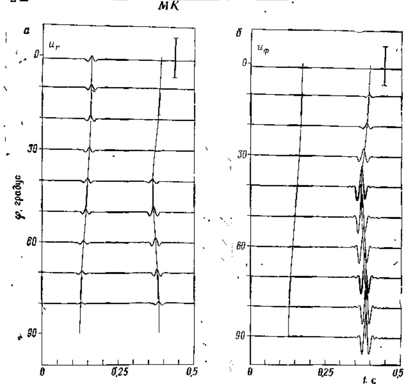


Рис. 6.6. Радиальное (*а*) и касательное (*б*) смещения, обусловленные сосредоточенной силой, помещенной в меловой формации Остин. Вертикальная черта указывает величину 10^{-16} см/дин

Упругая константа L определена так же, как и в уравнении (5.83). Компоненты смещения в цилиндрических координатах:

$$U_r = -(M + ila) K_1(Mr) A - (bK + il) K_1(Kr) B,$$
$$U_z = (il - Ma) K_0(Mr) A + (ilb - K) K_0(Kr) B \quad (6.18)$$

После численного интегрирования полученных выражений и проектирования на координатной оси сферической системы координат получим $u_r(r, \varphi, t)$ и $u_\varphi(r, \varphi, t)$.

Смещения для умеренно анизотропных меловых отложений формации Остин показаны на рис. 6.6. При расчетах были взяты следующие параметры: $\rho=2,2$ г/см³ (A, C, F, L, N в 10^{-10} дин/см²), $A=22$, $C=14$, $F=12$, $L=2,4$, $N=3,1$ $l_M=450$ км$^{-1}$, $\Delta l=1,5$ км$^{-1}$, $\omega_0=2\pi\cdot 10$ рад/с, $\omega_c=2\pi\cdot 30$ рад/с, $\Delta\omega=2\pi\cdot 2$ рад/с, $r=0,4$ км, $\varphi=1$, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 и 90°. Близкая к вертикали кривая характеризует зависимость скорости распространения энергии волны от угла $\varphi=\Gamma_E$ согласно формулам (2.73) и

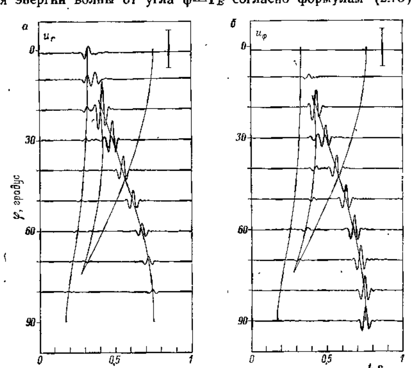


Рис. 6.7 Радиальное (*а*) и касательное (*б*) смещения, обусловленные сосредоточенной силой в тонкослоистом гипсе. Вертикальная черта показывает 10^{-16} см/дин

(2.74). Ясно, что центр симметричного импульса приходит в ожидаемое время при каждом азимуте φ как для квазипродольных, так и для квазипоперечных волн. Максимальная амплитуда квази S-волны наблюдается при $\varphi=50°$ вместо 90° и в этой области углов радиальная компонента смещения довольно существенна.

На рис. 6.7 показана сложная картина излучения в сильно анизотропной среде, представленной тонкослоистым гипсом, который согласно Левину [93] имеет следующие константы: $\rho=$

$=2{,}35$ г/см³, в 10^{-10} дин/см², $A=28{,}4$; $C=8{,}5$, $F=4{,}3$; $L=1{,}5$, $N=9{,}7$. При вычислениях использовались следующие параметры: $l_M=240$ км$^{-1}$, $\Delta l=1{,}2$ км$^{-1}$, $\omega_0=2\pi\cdot 20$ рад/с, $\omega_c=2\pi\cdot 15$ рад/с, $\Delta\omega=2\pi$ рад/с, $r=0{,}6$ км, φ равно 1, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 и 90°. Слабая квази P-волна вступает в отмеченные моменты времени, при этом скорость изменяется почти в 2 раза. График квазипоперечной волны более сложен: в интервале углов между двумя точками возврата при $\varphi=23°$ и $\varphi=74°$ для каждого направления распространения имеются три скорости. При $\varphi=80°$ форма сигнала совпадает с зависимостью силы от времени, тогда как между точками возврата (например, первое вступление при $\varphi=50°$) сигнал является преобразованием Гильберта от $g(t)$.

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ГРАНИЦАХ

В предыдущем разделе источники были представлены объемными силами, действующими в бесконечно малых объемах упругой среды, и их присутствие не нарушало однородности среды. Поэтому волны могли распространяться в области источника, не испытывая рассеивания, отражения и др. Другой способ определения источника заключается в задании напряжения на границе среды и в отыскании такой комбинации волн в среде, которая совместна с данными напряжениями. В этом аспекте интересны три типа границ: сферическая полость в бесконечной среде, цилиндрическая полость и плоская поверхность.

Сферический источник

Если импульс давления $p(t)$ действует равномерно на стенки сферической полости, находящейся в бесконечной однородной среде, то волны в среде имеют сферическую симметрию, следовательно, все величины не зависят от угловых координат. Поперечные волны отсутствуют: единственная компонента смещения является радиальной и может быть получена по скалярному потенциалу φ, который удовлетворяет следующему уравнению [31]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\\ &u_r=\partial\Phi/\partial r,\\ &p_{rr}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2\lambda}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}. \end{aligned}\right\} \quad (6.19)$$

Решение уравнений (6.19), представляющее расходящуюся сферическую волну, имеет вид

$$\Phi=\frac{A_1 f\,[t-(r-a)/\alpha]}{r}. \quad (6.20)$$

Для краткости положим $t'=[t-(r-a)/\alpha]$. Константа A_1 и функция $f(t')$ определяются из условия, что нормальное напряжение на стенке скважины равно приложенному напряжению с об-

ратным знаком. Если приложить давление в виде ступени $PU(t')$ при $r=a$, то потенциал смещения равен

$$\Phi_U = \frac{Pa^3}{4\mu r}\left[e^{-K\omega_0 t'}(\cos\omega_0 t' + K\sin\omega_0 t') - 1\right] U(t'). \tag{6.21}$$

В этом выражении $K=[\mu/(\lambda+\mu)]^{1/2}=(\alpha^2/\beta^2-1)^{-1/2}$ и $\omega_0=2\beta^2/\alpha a K$. Вывод этого соотношения был сделан Шарпом [142], Блэйком [19] и др. Соответствующее радиальное смещение

$$u_{rU} = \frac{Pa^3}{4\mu r}\left\{\frac{1}{r}\left[1 - e^{-K\omega_0 t'}(\cos\omega_0 t' + K\sin\omega_0 t')\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\alpha}\left[(1+K^2)\,\omega_0 e^{-K\omega_0 t'}\sin\omega_0 t'\right]\right\}. \tag{6.22}$$

Некоторые свойства этого смещения обсуждались Диксом [40] и Шарпом [142]. На любом расстоянии и при любом размере полости смещение начинается от нуля, представляя затухающее колебание с частотой, обратно пропорциональной радиусу полости. График смещения изображен на рис. 6.8 для $\alpha=2100$ м/с и $\beta=860$ м/с. Радиус полости равен 10 см. Для этих параметров колебания заканчиваются за доли миллисекунд. На близких расстояниях смещение стремится к величине, которую можно определить согласно статической теории упругости. На больших расстояниях главная особенность формы сигнала — наличие резкого положительного полупериода, амплитуда которого убывает с расстоянием. В более мелком объеме сигнал будет представлять короткий одиночный импульс. В связи с этим рассмотрим более внимательно второе слагаемое в (6.22). Если радиус устремить к нулю, то величина ω_0 неограниченно возрастает. Импульс становится уже, но его высота увеличивается пропорционально ω, площадь под кривой остается постоянной. Фактически

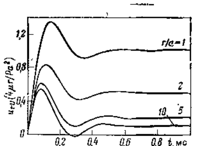


Рис 6 8. Графики смещения на разных расстояниях от сферической полости, к которой приложено давление в виде ступеньки

$$\int_0^\infty (1+K^2)\,\omega_0 e^{-K\omega_0 t'}\sin\omega_0 t'\,dt' = 1.$$

Поэтому второе слагаемое при $\omega_0\to\infty$ стремится к δ-функции, т. е. к импульсу бесконечно малой длительности и бесконечной высоты. Это значит, что давление в виде ступеньки, приложенное к стенке очень малой полости, дает смещение вида

$$U_{rU} = \frac{Pa^3}{4\mu r}\,\frac{1}{\alpha}\,\delta(t'). \tag{6.23}$$

При зависимости источника от времени $P_0 g(t)$ может быть получено сверткой:

$$u_r = \frac{P_0}{P} \int_0^{t'} g'(\tau)\, u_{rU}(t' - \tau)\, d\tau = \frac{P_0 a^3}{4\mu r} \frac{1}{\alpha} g'(t'). \qquad (6.24)$$

Радиальное смещение совпадает с производной сигнала в источнике. Это то же самое, что мы получили выше для центра расширения; из сравнения (6.24) с (6.8) можно заключить, что двухполюсная сила $2hG$ для центра расширения эквивалентна множителю $\pi a^3 P_0 \alpha^2/\beta^2$ для малой сферической полости.

Цилиндрический источник

Другой этап к более реалистичной модели источника, используемого в сейсморазведке, был сделан Хиленом [66], рассмотревшим импульс давления, действующем на некотором участке пустой цилиндрической полости. Геометрия модели и система координат приведены на рис. 6.9,*а*. Хилен выразил решение уравнения движения упругой среды в цилиндрических координатах через два потенциала смещения и показал в интегральной форме, как нужно скомбинировать элементарные конические волны, чтобы получить нормальные напряжения на стенке полости, равные (в пределах выделенного участка) давлению на стенки цилиндра с обратным знаком и равные нулю в остальных точках цилиндра. На больших по сравнению с размерами источника расстояниях, а также на расстояниях от оси цилиндра, больших кажущейся (для заданного направления) длины волны, Хилен произвел оценку интегралов и получил смещения, представляющие низкочастотную часть поля в дальней зоне. Або-Зена [1] обнаружил ошибки в выводах Хилена, но полученные им выражения для дальней зоны точно совпадают с хиленовскими. Как указывается ниже, такой же результат удается получить, применяя теорему взаимности [176].

Пусть в цилиндрической скважине радиуса a действует импульс давления $P_0 g(t)$, отличный от нуля в коротком интервале длиной d. Тогда

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{\pi a^2\, dP_0}{4\pi\mu\alpha r}\left(1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cos^2\varphi\right) g'\left(t - \frac{r}{\alpha}\right), \\ u_\theta &= 0, \\ u_\varphi &= \frac{\pi a^2\, dP_0 \sin\varphi\cos\varphi}{2\pi\mu\beta r}\, g'\left(t - \frac{r}{\beta}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6.25)$$

Относительные амплитуды продольных и поперечных смещений и их зависимость от угла показаны на рис. 6.3,*д*. Заметим, что хотя давление действует на стенки цилиндра в горизонтальном направлении, смещение продольной волны вблизи вертикали не падает до нуля, как это наблюдалось в случае четырех радиальных сил, показанных на схеме 6.3,*в*. Характеристика на-

правленности для поперечной волны такая же, как и в случае четырех сил, но отношение максимума поперечной волны к максимуму продольной для этих двух источников различно.

Хилен также исследовал действие касательного напряжения $Tg(t)$, действующего по кругу, как это показано на рис. 6.9,*б*. Излучаемое смещение для этого случая

$$\left.\begin{aligned} u_r &= 0, \\ u_\theta &= -\frac{\pi a^2\,dT\,\sin\varphi}{4\pi\mu\beta r}\,g'\left(t-\frac{r}{\beta}\right), \\ u_\varphi &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.26)$$

Эти смещения пропорциональны смещениям для простого источника, состоящего из двух пар сил с моментом, характеристики направленности которого даны на рис. 6.3,*г*.

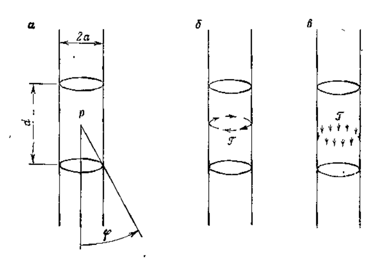


Рис. 6.9. Три типа напряжений, приложенных к короткому участку цилиндрической полости в модели Хилена

Третий, исследованный Хиленом, случай относится к касательному напряжению $Tg(t)$, действующему в осевом направлении, как показано на рис. 6.9,*в*. Ему отвечают смещения:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{2\pi a d T\cos\varphi}{4\pi\rho\alpha^2 r}\,g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right), \\ u_\theta &= 0, \\ u_\varphi &= -\frac{2\pi a d T\sin\varphi}{4\pi\rho\beta^2 r}\,g\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6.27)$$

Такую же форму имеют смещения для источника типа сосредоточенной силы, характеристика направленности которого дана на рис. 6.3,*а*.

Сосредоточенные силы на свободной поверхности

Силы, действующие на земной поверхности, часто являются источниками микросейсм, но могут быть использованы и в полезных целях. Падающий груз и механический вибратор генерируют контролируемые силы, используемые в сейсморазведке; достаточно мощные воздействия вызываются железнодорожным и автомобильным транспортом, ветер и любые виды звукового излучения генерируют сейсмические волны благодаря давлению на земную поверхность. Очевидно, необходимо понимать природу волн, вызываемых силами на плоской границе.

Обзор обширной литературы по задаче Лэмба и развернутый очерк развития теории были даны Ивингом и другими [47]. Здесь будут приведены результаты Миллера и Перси [103], относящиеся к вертикальной сосредоточенной силе, а также результаты Черри [35], относящиеся к горизонтальной силе.

Сила, перпендикулярная к поверхности. Возьмем маленький диск, в пределах которого на свободную поверхность действуют нормальные напряжения, зависящие от времени по синусоидальному закону. Миллер показал, как следует скомбинировать фундаментальные решения волнового уравнения в цилиндрических координатах, чтобы нормальные напряжения на площади диска были (в данный момент времени) постоянны, а вне диска обращались в нуль. Смещения были затем выражены в виде интегралов, которые оценивались для диска с малым радиусом и для радиальных расстояний от источника, много больших длины волны объемных волн. В пределе этот источник может рассматриваться как сосредоточенная сила $G_0\, e^{i\omega t}$. Вследствие симметрии относительно вертикальной оси компонента u_0 равна нулю, а другие компоненты независимы от θ. Зависимость смещений от полярного угла и радиального расстояния при $\sin\varphi < \alpha$ выражается формулами:

$$
\left.
\begin{aligned}
u_r &= \frac{G_0 \cos\varphi\,[1 - 2(\beta/\alpha)^2 \sin^2\varphi] \times}{2\pi\rho\alpha^2 \{[1 - 2(\beta/\alpha)^2 \sin^2\varphi]^2 +} \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{\times\, e^{i\omega r/\alpha}\, e^{i\omega t}}{+ 4(\beta/\alpha)^3 \sin^2\varphi \cos\varphi\,[1 - (\beta/\alpha)^2 \sin^2\varphi]^{1/2}\}} \\
u_\theta &= 0, \\
u_\varphi &= \frac{-G_0 \sin\varphi \cos\varphi\,[(\beta/\alpha)^2 - \sin^2\varphi]^{1/2}\, e^{-i\omega r/\beta}\, e^{i\omega t}}{\pi\rho\beta^2 r\, \{(1 - 2\sin^2\varphi)^2 + 4\sin^2\varphi \cos\varphi\,[(\beta/\alpha)^2 - \sin^2\varphi]^{1/2}\}},
\end{aligned}
\right\} \quad (6.28)
$$

Амплитуды $U_r = (4\pi\rho\alpha^2 G_0)\,|u_r|$ и $U_\varphi = (4\pi\rho\alpha^2/G_0)\,|u_\varphi|$ изображены на рис. 6.10, *а* для $\alpha^2/\beta^2 = 3$. Радиальное смещение является полностью продольным, его амплитуда вещественна и не зависит от частоты. Касательное смещение распространяется со скоростью поперечной волны и амплитудой, которая не зависит от частоты, но это смещение имеет фазовый сдвиг на углах φ, превышающих $\arcsin(\beta/\alpha)$. Диаграмма направленности поперечных волн для этих углов дана пунктиром.

С и л а, п а р а л л е л ь н а я г р а н и ц е. В случае горизонтальной силы симметрия относительно вертикальной оси отсутствует и решение в цилиндрических координатах должно зависеть от угла θ. С учетом этого дополнения Черри построил решения волнового уравнения, удовлетворяющие условию отсутствия напряжений на всей границе, за исключением малого круга, в пределах которого касательные напряжения создавались горизонтальной силой $G_0\, e^{i\omega t}$, приложенной к жесткому диску. Смещения бы-

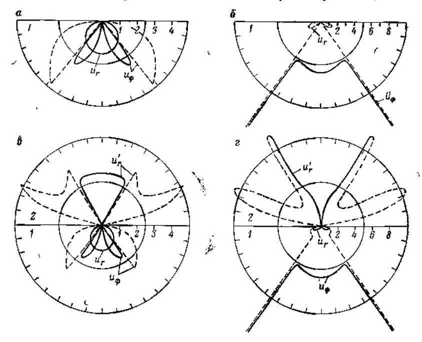


Рис. 6.10. Характеристика направленности объемных волн, излучаемых сосредоточенными источниками на плоской границе упругого полупространства (*1*), контактирующего с воздухом или жидкостью (*2*).

а, в — сила, перпендикулярна к поверхности; *б, г* — сила параллельна поверхности

ли получены в виде интегралов, которые затем оценивались в дальней зоне при $\sin\varphi < \beta/\alpha$ для малого размера источника:

$$
\left.
\begin{aligned}
u_r &= \frac{G_0 (\beta/\alpha) \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi \,[1-(\beta/\alpha)^2 \sin^2\varphi]^{1/2} \times}{\pi\rho\alpha^2 r \,\{[1-2(\beta/\alpha)^2 \sin^2\varphi]^2 +} \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{\times\, e^{-i\omega r/\alpha}\, e^{i\omega t}}{+\,4(\beta/\alpha)^3 \sin^2\varphi \cos\varphi\,[1-(\beta/\alpha)^2 \sin^2\varphi]^{1/2}\}}, \\
u_\theta &= \frac{G_0 \sin\theta\, e^{-i\omega r/\beta} e^{i\omega t}}{2\pi\rho\beta^2 r}, \\
u_\varphi &= \frac{G_0 \cos\theta \cos\varphi\,(1-2\sin^2\varphi)\, e^{-i\omega r/\beta}\, e^{i\omega t}}{2\pi\rho\beta^2 r\,\{(1-2\sin^2\varphi)^2 + 4\sin^2\varphi \cos\varphi\,[(\beta/\alpha)^2-\sin^2\varphi]^{1/2}\}}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (6.29)
$$

В вертикальной плоскости, в которой лежит вектор силы, радиальные и касательные смещения изменяются так, как это показано на рис. 6.10,б. Пунктирная часть кривых для поперечных волн снова указывает на то, что амплитуды в формуле (6.29) являются комплексными.

Из сравнения полученных соотношений с формулами (6.5) и рис. 6.3,*а* видно, что объемные волны, излучаемые сосредоточенной силой на свободной границе, резко отличаются по своим характеристикам от волн, возбужденных сосредоточенной силой в безграничной среде.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА ВЗАИМНОСТИ

Вывод соотношений, характеризующих излучение продольных и поперечных волн от сил, приложенных к границе, является довольно сложным. Синтез распределения напряжений в источнике согласно решениям волнового уравнения в выбранной координатной системе, определение интегральных выражений для смещений, интегрирование по частотам с целью построения импульсных сейсмограмм и оценка интегралов в некотором диапазоне переменных — каждый из этих шагов требует математического искусства и изобретательности даже в случае простейшей геометрии границ и источников. В случае же с меньшей симметрией сложность во много раз возрастает. Например, излучения от двух противоположно направленных сосредоточенных сил, действующих на стенку пустой цилиндрической полости, можно было оценить способом Хилена, но отсутствие осевой симметрии усложняет каждый шаг. Если вместо воздействия на свободную границу сосредоточенная сила действовала бы на плоской границе между твердой и жидкой средами, то потенциалы в жидкой среде необходимо было бы учитывать на протяжении всех вычислений. Вывод точных интегральных выражений для смещений и построение приближенных выражений для низких частот и больших расстояний — весьма сложная задача, а для более сложной геометрии какие-то упрощения должны быть сделаны еще раньше. В этом разделе показывается, что простой метод вычисления характеристик излучения различных источников вытекает из принципа взаимности для упругих волн. Этот метод, в котором излучение источника вычисляется как бы в обратном порядке, приводится ниже.

Формулировка принципа взаимности

Различные формы взаимности между источниками и возмущениями уже давно были установлены в электрических цепях, статической теории упругости и акустике. Взаимность для упругого тела исследовалась Морсом и Фешбахом [107], а Кнопов и Ганги [84] продемонстрировали соотношение взаимности между сосредоточенной силой и смещением частиц. Принцип взаимности формулируется следующим образом [176]. Если приложенная в некоторой

точке P ограниченной неоднородной анизотропной упругой среды сосредоточенная сила, имеющая направление α и временную зависимость $f(t)$, создает в некоторой другой точке Q смещение, компонента которого в направлении β равна $u(t)$, то приложение той же самой силы $f(t)$ в точке Q в направлении β вызовет смещение в точке P, проекция которого на направление α совпадает с $u(t)$.

Сосредоточенные силы на плоской границе

Вывод уравнений для смещений, возникающих благодаря действию сосредоточенной силы на границе между жидкостью и твердым веществом, будет служить иллюстрацией использования принципа взаимности. Вначале рассмотрим силу, действующую по нор-

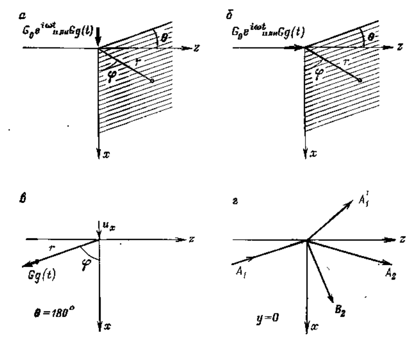


Рис. 6.11. Схемы, иллюстрирующие действие сосредоточенных сил на плоской границе

мали к границе (рис. 6.11,*а*). Сосредоточенная сила $Gg(t)$ действует в начале координат вдоль положительного направления оси x, которая будет также и полярной осью сферической системы координат. Необходимо найти радиальное u_r и касательное u_φ смещения в точке Q на некотором большом расстоянии от источника r в направлении, задаваемом углом φ от вертикали. Принцип взаимности гласит, что если бы сила $Gg(t)$ действовала в точке Q, то вертикальное смещение в точке действительного источника было бы равно u_r. Поставим $Gg(t)$ вместо u_r. Если бы среда

была безграничной, смещение в точке источника происходило бы в том же направлении, что и действие силы. Это смещение оказывается полностью продольным, и равнялось бы согласно (6.5) $Gg(t)/4\pi\rho\alpha^2 r$. Это выражение описывает падающую на границу продольную волну, поэтому необходимо учесть явление отражения. Так как расстояние r предполагается большим, сферическую волну можно аппроксимировать плоской. Отражение плоской волны на границе жидкость — упругое тело обсуждалось в гл. 2 [см. рис. 2.11 и формулы (2.56)]. В соответствии с обозначениями на рис. 2.11 радиус r_b нужно взять в полуплоскости $\theta = 180°$, как показано на рис. 6.11,*в*. Плоская продольная волна, распространяющаяся в данном направлении, может быть записана в виде $A_1 f(t + x\cos\varphi/\alpha - z\sin\varphi/\alpha)$, соответствующее смещение в начале координат в направлении распространения равно $A_1 f'(t)/\alpha$. Поскольку оно представляет смещение, вызванное точечной силой, величина A_1 должна быть равна $G/4\pi\rho\alpha r$ и $f(t)$ есть интеграл от $g(t)$ или $g^1(t)$. До сих пор, пока объемные волны могут быть выражены через потенциалы (т. е. пока кажущаяся скорость в горизонтальном направлении больше наибольшей скорости объемных волн), потенциалы и смещения всех волн имеют одну и ту же временную зависимость, поэтому форма волны может изучаться непосредственно. Потенциалы в твердой среде, отвечающие лучам, показанным на рис. 6.11,*г*, могут быть записаны так:

$$
\left.
\begin{aligned}
\Phi &= A_1 g^1\left(t + \frac{x\cos\varphi}{\alpha} - \frac{z\sin\varphi}{\alpha}\right) + \\
&+ A_1 g^1\left(t - \frac{x\cos\varphi}{\alpha} - \frac{z\sin\varphi}{\alpha}\right), \\
\varphi_y &= B_1 g^1\left[t - \frac{x(1-\beta^2\sin^2\varphi/\alpha^2)^{1/2}}{\beta} - \frac{z\sin\varphi}{\alpha}\right], \\
\Phi' &= A_1' g^1\left[t + \frac{x(1-\alpha'^2\sin^2\varphi/\alpha^2)^{1/2}}{\alpha'} - \frac{z\sin\varphi}{\alpha}\right],
\end{aligned}
\right\}
\tag{6.30}
$$

При помощи формулы (2.56) все потенциалы выражаются через A_1, а смещение u_x в начале координат определяется формулой (2.22). Согласно условию взаимности, это смещение непосредственно равно u_r. Точно так же находится и касательное смещение. Предположим, что сосредоточенная сила действует в направлении φ, возбуждая падающую на границу SV-волну, для которой $B_1 = -G/4\pi\rho\beta r$. Потенциалы плоских волн дают в этом случае величину u_x, которая совпадает с касательным смещением u_φ, возникающим под воздействием нормальной силы, приложенной к границе. Из соображений симметрии, компонента $u_\theta = 0$. Аналогично определяется смещение u'_r в жидкой среде; при этом компоненты u'_θ и u'_φ равны нулю. Следовательно, полученные выражения дают все три компоненты смещения при воздействии нормальной

сосредоточенной силы на границу между жидким и упругим полупространствами в начале координат:

$$
\left.
\begin{aligned}
u_r &= \frac{G\cos\varphi}{4\pi\rho\alpha^2 r}\, g\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\times \\
&\times\left\{\frac{2\left[1-2(\beta^2/\alpha^2)\sin^2\varphi\right]}{\dfrac{\rho'\alpha'\cos\varphi}{\rho\alpha\left(1-\dfrac{\alpha'}{\alpha^2}\sin^2\varphi\right)^{1/2}}+\dfrac{4\beta^3}{\alpha^3}\sin^2\varphi\cos\varphi\left(1-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\sin^2\varphi\right)^{1/2}+\left(1-2\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\sin^3\varphi\right)^2}\right\}, \\
u_0 &= 0, \\
u_\varphi &= \frac{-G\sin\varphi}{4\pi\rho\beta^2 r}\, g\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\times \\
&\times\left\{\frac{4\cos\varphi\,(\beta^2/\alpha^2-\sin^2\varphi)^{1/2}}{\dfrac{\rho'\alpha'\left(1-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2\varphi\right)^{1/2}}{\rho\alpha\left(1-\dfrac{\alpha'^2}{\beta^2}\sin^2\varphi\right)^{1/2}}+4\sin^2\varphi\cos\varphi\,(\beta^2/\alpha^2-\sin^2\varphi)^{1/2}+\dfrac{4\cos\varphi\,(\beta^2/\alpha^2-\sin^2\varphi)^{1/2}}{}+(1-2\sin^2\varphi^2)^2}\right\}. \\
u'_r &= \frac{-G\cos\varphi}{4\pi\rho'\alpha'^2 r}\, g\left(t-\frac{r}{\alpha'}\right)\times \\
&\times\left\{\frac{(2\rho'\alpha'/\cos\varphi)/\left[\rho\alpha/(1-\alpha^2\sin^2\varphi/\alpha'^2)^{1/2}\right]}{\dfrac{\rho'\alpha'\left(1-\dfrac{\alpha^2}{\alpha'^2}\sin^2\varphi\right)^{1/2}}{\rho\alpha\cos\varphi}+\dfrac{4\beta^3}{\alpha\alpha'^2}\sin^2\varphi\left(1-\dfrac{\beta^2}{\alpha'^2}\sin^2\varphi\right)^{1/2}\times\left(1-\dfrac{\alpha^2}{\alpha'^2}\sin^2\varphi\right)^{1/2}+\left(1-2\dfrac{\beta^2}{\alpha'^2}\sin^2\varphi\right)^2}\right\}, \\
u'_\theta &= 0, \\
u'_\varphi &= 0,
\end{aligned}
\right\}\quad (6.31)
$$

Формулы (6.31) переходят в (6.28) (причем $u'_r \to 0$), если плотность флюида становится пренебрежимо малой. Влияние флюида иллюстрируется рис. 6.10,в, на котором изображены смещения поперечных и продольных волн при $\alpha^2/\beta^2=3$, $\alpha/\alpha'=2$ и $\rho/\rho'=1{,}5$. **Амплитуда смещений заметно меньше, чем свободной границы. На** этом рисунке в том же масштабе изображено смещение продоль-

ной волны во флюиде $u'_r = (4\pi\rho\alpha^2/G)|u'_r|$. В стационарном случае кривые определяют характеристику направленности источника во всем диапазоне углов, включая и закритические. В случае импульсной возбуждающей силы зависимость смещения от времени совпадает с сигналом в источнике в области углов, отвечающей сплошным кривым.

Если потенциалы уже вычислены, требуются совсем небольшие дополнительные усилия, чтобы вычислить горизонтальные компоненты смещений в каждом из трех случаев, в результате чего можно найти радиальное и касательное движения, возникающие под действием горизонтальной силы. Эти движения непосредственно выражаются величинами u_r, u_φ и u'_r в направлении $\theta = 180°$. Из рис. 6.11,*в* видно, что зависимость этих трех смещений от угла θ должна выразиться множителем $\cos\theta$, который принимает значение -1 при $\theta = 180°$. Компонента движения в направлении θ находится еще проще, поскольку сосредоточенная сила, которая действует в направлении θ, возбуждает в начале координат волну SH; при отражении которой продольные волны не возникают. Рис. 6.10,*г* показывает влияние флюида на указанные выше параметры среды. Флюид оказывает малое влияние на излучение поперечной волны U_φ — основной эффект заключается в сглаживании нулей при $\varphi = 45°$. Продольное смещение U_r возрастает, хотя все еще остается малым. Излучение во флюид имеет сильно изрезанную характеристику направленности с пиками вблизи $\arcsin(\alpha'/\beta)$ и $\arcsin(\alpha'/\alpha)$.

Силы в цилиндрической полости

Применение условия взаимности при оценке низкочастотного излучения, возникающего благодаря импульсу давления, приложенному к короткому отрезку пустой скважины, дает хорошее соответствие с результатами Хилена, выраженными формулами (6.18). Условие взаимности использовалось также при оценке излучения от пары сил, действующих на стенку скважины. Рассмотрим примеры в предположении радиально ориентированных сил $Gg(t)$, приложенных в точках, показанных на рис. 6.12. Задача состоит в определении смещений u_r и u_θ, наблюдаемых в горизонтальной плоскости на расстоянии r от оси, в направлении θ. Смещение u_r есть сумма смещений, вызванных двумя изображенными силами. Если считать, что сила $Gg(t)$ действует в точке, в которой отыскивается значение u_r, то сумма двух радиальных смещений на противоположных концах диаметра будет равна u. Следовательно, необходимо определить радиальное движение стенок скважины при прохождении продольной волны. Вначале рассматривается каждое из трех напряжений, действующих во взаимно перпендикулярных направлениях и генерирующих плоскую продольную волну. Для длин волн, много больших диаметра скважины, можно использовать статическое решение. Для нормального напряжения p_{zz}, действующего в направлении оси скважины, радиальное дви-

жение стенок скважины не зависит от θ и равно $-\nu a p_{zz}/E$ [175]. Для нормального напряжения p_{xx}, действующего перпендикулярно к оси цилиндра, радиальное смещение равно $[ap_{xx}(1+2\cos 2\theta)/E]$ (значение $\theta=0$ отвечает направлению оси x). Для точечного источника $Gg(t)$, действующего на расстоянии r, волну вблизи цилиндра можно аппроксимировать плоской волной со смещением $u=(G/4\pi\rho\alpha^2 r)g(t-r/a)$ и, следовательно, с нормальным напряжением $N=(G/4\pi\alpha r)g'(t-r/\alpha)$ в направлении распространения волны. Нормальное напряжение $N\nu/(1-\nu)$ существует в каждом из двух перпендикулярных направлений. Вызванное все-

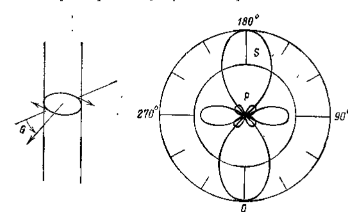


Рис 6.12. Сдвиговые (S) и продольные (P) смещения, вызванные радиальными силами в цилиндре [176]

ми тремя нормальными напряжениями радиальное смещение стенки в точке $\theta=0$

$$u_r = \frac{aN(1+2\cos 2\theta)}{E} + \frac{aN\nu(1-2\cos 2\theta)}{E(1-\nu)} - \frac{aN\nu^2}{E(1-\nu)} = \frac{aN}{2\rho\beta^2}\left[1+\frac{8(1-\beta^2/\alpha^2)(\beta^2/\alpha^2)}{3-4\beta^2/\alpha^2}\cos 2\theta\right]. \qquad (6.32)$$

Это выражение не изменится, если θ заменить на $\theta+180°$. Следовательно, радиальное смещение на противоположном конце диаметра также описывается данным выражением. Сумма двух смещений, т. е. удвоенное значение u_r, приравнивается радиальному смещению, наблюдающемуся на расстоянии r в направлении θ под воздействием двух сосредоточенных радиальных сил на стенках цилиндра:

$$u_r = \frac{Ga}{4\pi\rho\beta^2\alpha r}\left[1+\frac{8(1-\beta^2/\alpha^2)(\beta^2/\alpha^2)}{3-4\beta^2/\alpha^2}\cos 2\theta\right] g'\left(t-\frac{r}{\alpha}\right). \qquad (6.33)$$

Аналогичные рассуждения ведут к оценке касательного движения, обусловленного двумя радиальными силами:

$$u_\theta = \frac{Ga(1-\beta^2/\alpha^2)\sin 2\theta}{\pi\rho\beta^3 r(3-4\beta^2/\alpha^2)} g'\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \qquad (6.34)$$

Видно, что форма волны совпадает с производной сигнала в источнике. Зависимость амплитуды от угла при $\alpha^2/\beta^2=3$ изображена на рис. 6.12. Из формулы (6.33) можно заметить, что продольная волна имеет «обращенный максимум» в малом интервале углов вблизи $\theta=90°$, где движение противоположно по знаку движения в главных областях.

Источник, состоящий из противоположно направленных касательных сил, показан на рис. 6.13 при тех же условиях, которые указаны в предыдущем случае. Приводимые ниже выражения для

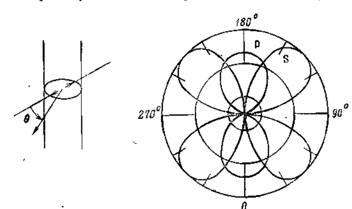


Рис. 6.13. Сдвиговые (S) и продольные (P) смещения, вызванные касательными силами в цилиндре (по Уайту)

радиальной и касательной компонент смещения также были получены с использованием условия взаимности:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{2Ga\,(1-\beta^2/\alpha^2)\sin 2\theta}{\pi\rho\alpha^3 r\,(3-4\beta^2/\alpha^2)}\,g'\left(t-\frac{r}{\alpha}\right),\\ u_\theta &= \frac{Ga}{4\pi\rho\beta^3 r}\left[1+\frac{8\,(1-\beta^2/\alpha^2)}{3-4\beta^2/\alpha^2}\cos 2\theta\right]g'\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6.35)$$

Соответствующие характеристики направленности изображены на рис. 6.13. Отчетливо виден «обращенный максимум» для поперечных волн, поскольку движения вблизи 90° происходят в направлении противоположном тому, которое можно было бы ожидать вследствие крутящего момента, возникающего под воздействием рассматриваемой пары сил.

НЕКОТОРЫЕ ИСТОЧНИКИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

Хотя многие источники сейсмических волн являются нелинейными и на изучаемое поле оказывают сильное влияние близлежащие границы, некоторые характеристики их поведения могут быть выведены из сопоставления с простейшими моделями. Мы не будем касаться детального описания и изготовления конкретных источ-

ников. Применяемые в сейсморазведке устройства для возбуждения сейсмических волн кратко описываются в книге [157]. Детальное сопоставление различных морских источников имеется в работе [88]; источники, используемые в наземной сейсморазведке, исследовались в ряде диссертаций [75, 144]. Джонсон [77] опубликовал обзор и библиографию литературы по механизму очагов землетрясений.

Разрыв под напряжением

Возможно, что этот наиболее активный механизм генерирования сейсмической энергии не представляет собой источника в обычном понимании этого слова, так как отсутствует какая-либо внешняя энергия, затрачиваемая в процессе генерации волн. В этом случае большие деформации, возникающие во внутренних точках земли, ведут к разрыву сплошности вещества, размеры которого могут сильно варьировать — начиная от микротрещин до видимых разрывов, сбросов и разломов. По отношению к излучению от микротрещин используется термин *сейсмическая эмиссия*, более сильные нарушения сплошности характеризуются понятием *сейсмической активности* [64]. При регистрации микросейсмических колебаний в качестве индикатора угрожающих больших разрывов в шахтах и горных выработках, основным параметром является число событий в единицу времени, а локализация и механизм каждого источника представляют меньший интерес.

При гидравлическом разрыве плохо проницаемых газовых резервуаров с целью увеличения их дебита или горячих пород при эксплуатации геотермальных источников, когда разрывы в породах вызываются под воздействием флюида, локализация каждой вновь сформированной трещины является более существенным, чем время действия или механизм источника. Локализация нарушений успешно осуществляется измерением времен прихода P-волн расстановкой из нескольких приемников. Другой подход состоит в определении направления смещения частиц при регистрации P-волн трехкомпонентными приемниками с известной ориентацией [3], что дает направление на источник. Следующим этапом является регистрация времени прихода S-волны. Если скорости распространения поперечных и продольных волн заранее известны, то время Δt между их вступлениями позволяет определить расстояние до источника. Необходимо, конечно, чтобы источник излучал волны обоих типов в направлении приемника. Если предположить, что флюид, врывающийся во вновь образованную трещину, представляет пару противоположно направленных сил, то (см. рис. 6.3,*б*) данное условие удовлетворяется для большинства направлений.

Географическое размещение сейсмологических станций и хорошее знание скоростной модели Земли позволяют определять время и координаты очагов землетрясений весьма точно. Для большинства землетрясений зона разрыва простирается на много километров и сам разрыв продолжается несколько секунд. Механизм

очага землетрясений — объект активных как теоретических, так и экспериментальных исследований. Один из подходов заключается в том, чтобы представить источник в виде некоторого распределения напряжений, вызывающих наблюдаемую волновую картину. Скачок касательного напряжения при переходе через образующуюся трещину в качестве первого приближения можно аппроксимировать двойной парой сил, показанной на рис. 6.4,б. Из формулы (6.11) следует, что скачок напряжения и ориентация разрыва могут быть получены на основе достаточно точных измерений движения частиц на многих направлениях от источника. Поскольку разрыв распространяется вдоль плоскости сброса с конечной скоростью, характеристика направленности двойной пары сил должна быть дополнена за счет учета направленности движущегося источника. Другие элементарные источники, например центр расширения, могут быть использованы при моделировании волн, излучаемых конкретным землетрясением. Этот подход к описанию механизма очага в деталях рассматривался Пилантом [120].

Напряжение, приложенное к поверхности

Многие источники сейсмических волн действуют на поверхности земли так, что механический контакт осуществляется непосредственно на самой поверхности. Некоторое представление о поведении таких источников можно получить, рассматривая излучение волн от сосредоточенных сил, действующих параллельно свободной границе упругого полупространства или перпендикулярно к ней. В случае механических источников излучение от кругового штампа на свободной границе обеспечивает описание как поведения самого источника, так и излучаемых объемных волн. В большинстве конкретных ситуаций предположение об однородности полупространства нуждается в уточнении, поскольку сейсмические скорости, как правило, имеют очень низкие значения вблизи поверхности Земли. Если изменение скорости с глубиной известно, то с целью уточнения амплитуды волн можно использовать более корректные формулы для геометрического расхождения (взамен простого деления на расстояние). Легко учесть также явление преломления на промежуточных границах. Если для каждого из слоев известен коэффициент поглощения, то представляется возможным ослабить предположение и об идеальной упругости. Разделив спектры зарегистрированных волн на спектральную характеристику поглощения и осуществив обратное преобразование Фурье, получим сейсмограммы, которые наблюдались бы в идеально упругой среде. Предположение о свободной границе является достаточно реалистическим, так как акустический контраст между воздухом и грунтом очень велик, но даже это предположение необходимо иногда применять осторожно. Так, вибрационные источники могут порождать прямую воздушную волну, а при взрывании зарядов в воздухе ударная воздушная волна сама является источником сейсмических колебаний.

Воздушные взрывы. Там, где окружающая обстановка это позволяет, взрывание зарядов в воздухе обеспечивает получение больших значений излучаемой энергии при минимуме расходов на подготовку взрыва. Следовало бы ожидать, что излучение сейсмических волн от локальной площадки с высоким давлением, которое создается ударной волной, благоприятно для целей сейсмической разведки, если считать, что ударная воздушная волна не будет искажать запись приемников вблизи поверхности. Однако опубликованные Янеком [75] результаты измерений показывают, что излучение P-волн является более сложным, чем это ожидалось. На рис. 6.14 представлены сейсмограммы скорости движения

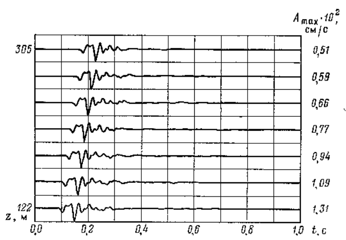


Рис. 6.14. Сейсмограмма радиальной компоненты скорости движения частиц от заряда массой 2 кг [75]

частиц на глубине от 125 до 310 м в глинистых сланцах формации Пиерре. Отрицательные амплитуды отвечают направлению скорости движения частиц вниз. Поправки за геометрическое расхождение и поглощение не вводились. Использовался обратный фильтр, спектральная характеристика которого обратна характеристике сейсмоприемника. Первый полупериод, продолжающийся менее чем 10 мс, отвечает быстро увеличивающейся направленной вниз силе на земной поверхности. Если бы ударная волна представляла собой давление в виде ступеньки, то остальная часть волны характеризовала бы направленную вверх скорость, медленно убывающую до нуля. В противоположность сказанному, наибольшее значение скорости частиц наблюдается через 50 мс после первого сигнала. Это явление аналогично сжатию воздушного пузыря. Измерения кристаллическим детектором давления показали, что после того как ударная волна прошла земную поверхность, давление на поверхности становится ниже атмосферного [123]. По-видимому, воздух, который стремится заполнить эту область пониженного давления, обусловливает быстрое увеличение давления на доста-

точно большой площади, благодаря чему излучается P-волна, примерно в 3 раза более интенсивная, чем первоначальный сигнал. При взрыве заряда массой 22,5 кг вторичный сигнал был лишь немного больше первоначального, а вступал он на 70 мс позже. Полезная энергия от заряда массой 2,3 кг (см. рис. 6.14) оценена Янеком в $7{,}5 \cdot 10^4$ Дж.

Механические источники, прижатые к поверхности. Характерная особенность многих источников заключается в том, что излучающий поршень прочно прижимается к грунту перед высвобождением первоначальной энергии. Наиболее применяемым как в сейсморазведке, так и при глубинном сейсмическом зондировании источником служит гидравлический вибратор, в котором вибрирующая платформа прижимается к Земле под массой транспорта. Модуляция гидравлического потока развивает в платформе периодическое усилие с частотой от 8 до 200 Гц, и с такой амплитудой, которая вызывает явление нелинейной упругости в грунте. Можно предпринять специальные меры, чтобы минимизировать влияние этих искажений на результаты. Для получения разумных выводов будем считать систему вибратор — грунт линейной. Так как платформу стремятся сделать как можно более жесткой, можно считать, что прикладываемая сила распределяется по всей площади контакта.

Этот же результат достигается в результате прижима изгибаемой диафрагмы к Земле и создания импульса давления выше диафрагмы. В первом случае в камере взрывается взрывчатая газовая смесь. Массивный корпус камеры обеспечивает реактивную силу, вызывающую давление на грунт. Во втором случае импульс давления создается воздушной пушкой, т. е. воздух, находящийся под высоким давлением, внезапно высвобождается в заполненную водой камеру. При воздействии давления через диафрагму грунт продолжает двигаться до тех пор, пока диафрагма не отклонится на некоторую максимальную величину, определяемую давлением воздуха. Это предположение подтверждается в работе Сиксты [174], где излучаемая наземной воздушной пушкой энергия увеличивается при увеличении давления, но не зависит от объема камеры с сжатым воздухом. Колебания от стационарных двигателей или насосов, связанных с землей так, что размер контакта значительно меньше длины излучаемых волн, а также от автомобилей и другого транспорта, могут быть описаны этой же моделью. Нашей задачей является упрощенное, но полезное описание поведения подобных источников с помощью механического импеданса грунта и внутреннего импеданса источника.

Будем считать, что область контакта есть круг радиуса b и грунт представляет собой упругое полупространство с параметрами ρ, α и β. В случае гидравлического вибратора платформа может рассматриваться как абсолютно жесткий диск. На статическое смещение диска полупространство реагирует как пружина, т. е. смещение пропорционально силе. Хотя смещение однородно по области контакта, нормальное напряжение зависит от радиуса, при

этом сила определяется как интеграл от напряжения по всей области контакта. Эта ситуация полностью аналогична возрастающему сжатию двух контактирующих сфер, показанных на рис. 3.7. Отношение силы к смещению, выражаемое формулой (3.35), основывается на условии, что радиус сферы много больше радиуса кругового контакта. Будем считать, что радиус сферы так велик, что сферу можно рассматривать как упругое полупространство. Если обозначить силу через F, а смещение через u, заменив в формуле (3.35) ΔG на F и ΔS на $2u$, то жесткость пружины K_G

$$F/u = 4\mu b/(1-\nu), \quad K_G = 4\mu b/(1-\nu) \tag{6.36}$$

В окрестности нулевой частоты импеданс среды (отношение силы к скорости)

$$Z_L \doteq K_G/i\omega \tag{6.37}$$

Вольф [194], воспользовавшись результатами Лэмба [90], вывел аппроксимацию низкочастотного импеданса с учетом первой и второй степени $(\omega b/\beta)$ и $(\omega b/\alpha)$:

$$Z_L = i\omega M_G + R_G + K_G/i\omega. \tag{6.38}$$

В частном случае, когда $\alpha^2/\beta^2 = 3$, т. е. коэффициент Пуассона равен 1/4):

$$M_G = 0{,}820\rho b^3 = 0{,}20(4\pi\rho b^3/3),$$
$$R_G = 4{,}20\rho\beta b^2,$$
$$K_G = 5{,}33\rho\beta^2 b.$$

Жесткость пружины соответствует значению жесткости, вычисленной по (6.36). Присоединенная масса M_G оказывается меньше массы грунтовой полусферы и, возможно, меньше массы платформы или любой другой излучающей структуры. Сопротивление R_G обусловлено излучением продольных, поперечных и рэлеевских волн.

Рассмотрим источник, имеющий механический импеданс Z_S и способный создавать усилие F_S на любой частоте ω. Тогда сила, обусловливающая импеданс среды

$$F = F_S Z_L/(Z_S + Z_L). \tag{6.39}$$

Отношение F/F_S называется коэффициентом усиления.

В качестве иллюстрации рассмотрим гидравлический вибратор с платформой радиуса $b = 75$ см и массой $M_B = 2 \cdot 10^6$ г. Вначале будем считать, что механический импеданс источника равен инерции платформы: $Z_S = i\omega M_B$. Более реалистическая модель гидравлического вибратора рассматривалась Лервиллом [92] и Уотерсом [173]. Чтобы использовать формулы Вольфа, положим $\alpha = \sqrt{3}\beta$, что отвечает, вероятно, консолидированным или кристаллическим породам, а не рыхлому грунту. Кривые (рис. 6.15) рассчитаны при $\beta = 600$ м/с и $\rho = 1{,}6$ г/см^3, на частотах до 100 Гц; в этом случае $2\pi b$ составляет примерно половину длины поперечной волны. Кривая 1 показывает, что сила, действующая на выбранный нами материал в низкочастотном диапазоне, на 10 %

больше силы, воздействующей на платформу. При расчете кривой 2 предполагалось, что источник имеет массу $2 \cdot 10^7$ г (20 т). Этот источник имеет резонанс на частотах, для которых радиус b еще мал по сравнению с длиной поперечной волны; при этом максимальное усиление пятикратное. Сравним эти графики с кривой, отмеченной значением $E=10$ на рис. 6.23. Согласно принципу взаимности коэффициент усиления для силы равен коэффициенту усиления для приемника, регистрирующего скорость частиц и жестко контактирующего с поверхностью полупространства. Сходство этих кривых указывает на хорошее соответствие между способами Вольфа и способами Нувера и О'Брайена [69].

Ударные источники. Для возбуждения сейсмических волн применялись удары молота или специальных свай о грунт, а также падение большого груза. Как правило, движущаяся масса устанавливается в такое короткое время, что зависимость действующей на грунт силы от времени можно аппроксимировать дельта-функцией. Например, груз, падающий с высоты 3 м, в момент удара имеет скорость V_0, равную 770 см/с. Предположим, что остановка массы происходит на расстоянии 1—2 см благодаря нелинейному вдавливанию в грунт. Длительность действия силы составляет всего несколько миллисекунд и спектр сигнала в источнике практически не зависит от частоты в интервале от нуля до нескольких сотен герц. Если благодаря поглощению волн в процессе их распространения и регистрирующей системе частотный спектр сигнала в источнике находится в низкочастотной области, то данный источник обеспечивает постоянное значение спектра входного сигнала в эффективной полосе частот и поэтому ведет себя как δ-функция

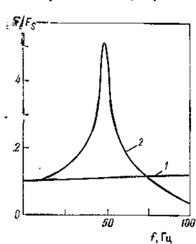


Рис. 6.15. Коэффициент усиления для гидравлического вибратора (1) и для части машины (2)

Положим $F=A\delta(t)$ и попытаемся оценить величину A. В течение удара происходит изменение импульса на величину M_0V_0, которая должна быть равной интегралу (по времени) от силы. Таким образом,

$$\int F dt = M_0 V_0, \qquad A = M_0 V_0, \qquad F = M_0 V_0 \delta(t) \qquad (6.40)$$

Среда и регистрирующая система имеют спектральную характеристику $H(\omega)$, которой отвечает сигнал $h(t)$. Следовательно, выходной сигнал в спектральной области равен $M_0V_0H(\omega)$, а по времени — $M_0V_0h(t)$. Для различных комбинаций массы и скорости соударения регистрируемый сигнал при любом удалении от источника пропорционален импульсу M_0V_0. Отмеченная пропорциональность наблюдалась в полевых экспериментах исследова-

тельской лаборатории Мобил в начале 50-х годов. В этих экспериментах сочетание малой массы и высокой скорости достигалось при помощи выстрела ружейной пули.

В начале 60-х годов этот же результат был получен в экспериментах Института геологии и геофизики Сибирского отделения АН СССР, в которых масса, достигавшая 3 т, ударялась о край траншеи.

Кручение относительно вертикальной оси. При возбуждении поперечных волн большой интерес представляет комбинация сил, показанная на рис. 6.3,*г*, поскольку в этом случае отсутствует излучение продольных волн. С учетом симметрии, применение этой комбинации к поверхности упругого полупространства только удвоит величину определяемых формулой (6.10) смещений без изменения характеристики направленности. Эксперименты с таким источником проводились Пекерисом и другими [118]. В работе [103] описывается импеданс грунта для кругового диска, поворачивающегося вокруг своей оси. Апплегэйт [6] построил и продемонстрировал источник, который передавал крутильное усилие на грунт. Маховое колесо массой 113 кг и частотой вращения 3,6 $с^{-1}$ развивало энергию около 2250 Дж. Приводимые в движение соленоидом металлические блоки, сцепленные с помощью штырей с маховым колесом, внезапно прекращали вращение последнего. В результате вращательный момент передавался платформе, которая прикреплялась к грунту с помощью четырех металлических штырей. При возбуждении этим источником наблюдались рефрагированные поперечные волны на расстояниях около 60 м. Несмотря на специальные меры по обеспечению симметрии источника относительно вертикальной оси, наблюдались также заметные продольные колебания. Крутильный вибрационный источник описывался также Брауном [26]. Существенным недостатком этого типа источников с точки зрения сейсморазведки на отраженных волнах является малая интенсивность излучения в субвертикальных направлениях.

Напряжение в скважинах

Взрывы больших зарядов. Под «большим» понимается такой заряд, который разрушает достаточно большую массу породы, формирует сферическую область разрушенных пород, размеры которой не зависят от первоначального диаметра скважины. В этом случае источник может моделироваться как ступенчатый скачок давления в расширяющейся сферической полости. Для приведенного на рис. 6.8 численного примера радиус полости был взят равным 10 см из соображений, что и радиус взрывных скважин в сейсморазведке такой же. Хотя прямая продольная волна от взрыва динамита представляет простой импульс, напоминающий быстро затухающее колебание на рис. 6,8, длительность этого импульса в 10 раз больше, чем это следует из значения резонансной частоты для полости в 10 см. Наблюденные и теоретические временные

масштабы можно совместить, если предположить, что источник ведет себя как «эквивалентная сферическая полость», радиус которой равен нескольким метрам. Несмотря на то что в окрестности заряда должно быть разрушение материала, а с помощью линейного упругого поведения можно определить размер некоторой сферы, было бы неэффективно использовать сферу, диаметр которой настолько превосходит действительные размеры источника. Необходимо заметить, что пустая сферическая полость не является корректной моделью тротилового взрыва, используемого в сейсморазведке. Возможно, что если в рамках этого подхода удалось бы учесть поведение разрушаемого материала, то он привел бы к более реалистическим результатам.

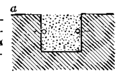
Взрывы являются очень компактным источником сейсмической энергии. При исследовании источников, применяемых в наземной сейсморазведке [75, 144], было найдено, что заряд массой 4,5 кг на глубине 15 м обеспечивает большую полезную энергию, чем любой другой источник, включая взорванный в воздухе динамит массой 22,5 кг. Но даже для этого источника эффективность (к.п.д.) преобразования химической энергии в сейсмическую очень низка. Рассмотрим колебание скорости частиц при взрыве заряда 0,45 кг массой в сланцах формации Пиерре (см. рис. 4.23). Форма волны, регистрируемой приемником в скважине № 10, приблизительно представляет один период синусоиды, $v_r = A \sin(2\pi t/T)$ при $A = 0{,}06$ см/с и $T = 0{,}005$ с. Расстояние от источника $d = 119$ м. Интенсивность $I = \rho\alpha v^2$, интегрируя которую по периоду T, получим энергию на единицу площади. Возьмем $\rho = 2{,}1$ г/см^3 и $\alpha = 2200$ м/с. Предположим, что энергия излучается равномерно во всех направлениях, площадь равна $4\pi d^2$. Полная излучаемая энергия

$$E = 4\pi d^2 \rho\alpha \int_0^T v_r^2\, dt. \tag{6.41}$$

Эта формула дает $E = 7{,}4\cdot 10^9$ (г·см^2/с^2 (эрг)). Справочное значение механического эквивалента энергии, соответствующее использованной массе тротила, равно $1{,}35\cdot 10^{13}$ эрг. Таким образом, сферу радиусом 119 м пересекает только 0,05 % первоначальной химической энергии. Даже после учета поглощения эффективность составляет лишь доли процента.

В з р ы в ы   в б л и з и   п о л о с т и. Будем считать, что взрыв создает сферическую излучающую область, излучаемое сферическое поле содержит только продольные волны. При сейсморазведке на поперечных волнах было бы желательно использовать контролируемые взрывные источники для возбуждения поперечных волн. Советские геофизики показали, что, если окружающие заряд породы имеют несимметричную структуру, то взрыв может давать большую горизонтальную силу, возбуждая как продольные, так и поперечные SH-волны. Одна из возможных схем приведена на рис. 6.16,*а*. Линейный заряд или серия зарядов размещается

вдоль одной из стенок траншеи, которая заполняется рыхлым материалом. Если подорвать заряд у левой стенки, то регистрируемое волновое поле будет содержать P- и SH-волны с одной и той же полярностью. При взрыве же заряда у противоположной стенки продольные волны сохраняют полярность, а полярность SH-волны изменяется на противоположную. Вычитание второй сейсмограммы из первой существенно подавляет P-волны и удваивает амплитуду SH-волн. На рис. 6.16,*б* показана другая схема. Три взрывных скважины заряжаются взрывчаткой. Подрыв среднего заряда создает разрушенную зону и полость достаточного размера, чтобы нарушить структуру пород вблизи других зарядов.



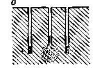


Рис. 6.16. Схема возбуждения поперечных волн посредством взрывов в траншее, заполненной рыхлым материалом (*а*), и в скважинах вблизи разрушенной зоны (*б*)

Сейсмограммы, полученные от двух других взрывов, снова комбинируются таким же образом, как и при взрыве в траншеях. Обе схемы успешно используются при сейсмической разведке методом поперечных волн.

Малые взрывы и воздушные пушки. Малый заряд взрывчатки или воздушная пушка создают импульс давления, действующий на коротком отрезке скважины, поэтому модель Хилена в этом случае является весьма разумной. Однако если скважина заполнена флюидом, развиваемое в источнике давление будет генерировать также интенсивные трубные волны, распространяющиеся в обоих направлениях от источника. По мере распространения импульса давления вдоль ствола скважины каждый короткий отрезок будет излучать объемные волны. Движение в каждой точке среды есть сумма вкладов от всех точек скважины с учетом временной задержки и амплитудного фактора, зависящего от расстояния и угла (рис. 6.17). Приближенная оценка низкочастотного излучения от малого взрыва в скважине сравнивалась с записью колебаний трехкомпонентным приемником в сланцах формации Пиерре [188]. На рис. 6.18 приведена запись сигнала на расстоянии 92,5 м. Видно, что изменение амплитуды поперечной волны не соответствует модели Хилена с характеристикой направленности, имеющей форму клеверного листа.

Учитывая затухание трубной волны и суммируя вклады вдоль скважины, найдем, что скважина продуцирует дополнительную характеристику направленности, аналогичную направленности интерференционной системы, что находится в хорошем соответствии с измерениями. Теоретические трассы приведены на рис. 6.19. На рис. 6.18 видно еще одно проявление трубной волны. Вступление, отмеченное как «вторичная поперечная волна», идентифицируется как S-волна, возникающая в забое взрывной скважины вследствие отражения трубной волны от забоя.

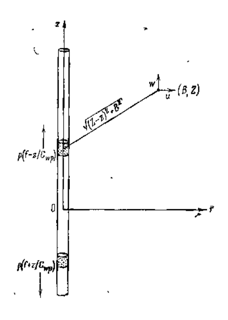


Рис. 6.17. Схема образования продольной волны при распространении трубной волны вдоль скважины [188]

Рис. 6.18. Трехкомпонентная регистрация скорости движения частиц для четырех направлений на расстоянии 90 м от малого взрыва [188].

1 — номер скважины/глубина в метрах; *2* — компонента; *3* — усиление; *4* — вторичные поперечные волны; *5* — отметка момента взрыва

Еще более четкий пример излучения, создаваемого трубной волной, показан на рис. 6.20. Воздушная пушка приводилась в действие на глубине 240 м. На трассах от вертикальных приемников на различных глубинах видны прямая продольная P_1- и поперечная S_1-волны. Более поздние вступления P_2 и S_2 обусловлены излучением от забоя взрывной скважины на глубине 390 м, обусловленным отражением трубной волны.

Падающий груз. Зависимость скорости поперечных волн от глубины в инженерных исследованиях может быть получена при измерении времени распространения волны между двумя неглубо-

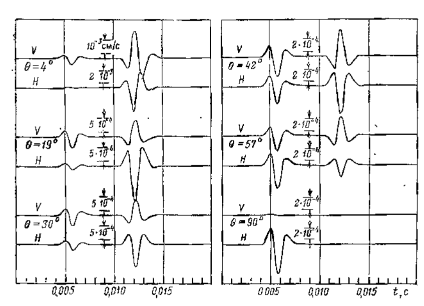


Рис. 6.19. Сейсмограмма скорости движения частиц, теоретически оцененных для тех же условий, что и на рис. 6.18 [188]

кими скважинами. С этой целью горизонтально распространяющиеся SV-волны генерировались простым бросанием груза на дно скважины, пробуренной до выбранной глубины. Чтобы упростить изменение глубины источника, падающий груз помещается в цилиндрический корпус, который может цепляться за стенку скважины на любой глубине при помощи убирающегося шипа [187].

На рис. 6.21 приведены сейсмограммы поперечных волн, регистрируемых от описанного источника в соседней скважине. Хиленом было показано, что низкочастотное излучение от напряжений, приложенных к стенке скважины параллельно ее оси, совпадает с излучением от сосредоточенной силы во внутренних точках упругой среды [см. формулу (6.27)]. Если пренебречь излучением от трубной волны, то этот факт должен быть справедливым и для груза, ударяющегося о забой скважины. Поэтому выражение (6.5)

может служить хорошей аппроксимацией для волн, возбуждаемых падающим грузом.

Электромеханические датчики. Устройства, служащие для линейного преобразования электрической энергии в сейсмическую, подразделяются на две группы: вибрационные и расширяющиеся. Увеличение объема во второй группе источников обеспечивается цилиндрическим корпусом магнитострикционного или электрострикционного материала; такие датчики, обеспечивающие высокочастотное излучение на малых расстояниях, используются при акустическом каротаже скважин. Для частот меньше 1 кГц с

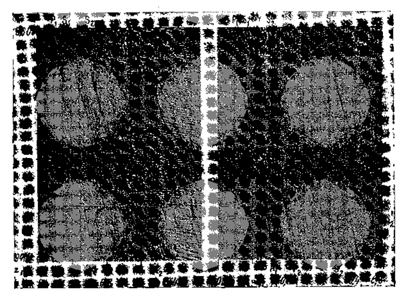


Рис. 6.20. Сейсмограмма, иллюстрирующая возникновение вторичного источника на забое скважины [116]

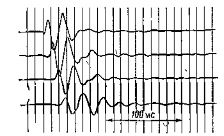


Рис 6.21. Горизонтально распространяющиеся SH-волны, регистрируемые вертикальными приемниками, помещенными в четырех скважинах. Регистрация проводилась с полосовым фильтром, с полосой пропускания 30—60 Гц

самого начала основное внимание уделялось вибрационным источникам, в которых использовалась сила, возбуждаемая током в катушке, помещенной в магнитное поле [71]. При возбуждении импульса, имеющего длительность 0,1 с и высокочастотное заполнение на 400 Гц, рефрагированные продольные волны [71] наблюда

лись на расстояниях более 300 м. Не так давно был сделан вибрационный источник, способный развивать силу 45 Н в частотном диапазоне 50—500 Гц [9]. Этот источник был смонтирован из двух скрепленных друг с другом серийных сейсмоприемников, помещенных в корпус, который мог закрепляться в мелкой скважине. Поперечные волны в соседних скважинах регистрировались на расстояниях, превышающих 30 м. Сейсмограмма с записью поперечных волн, приведенная на рис. 5.4, также была получена при помощи вибрационного источника, свободно подвешенного в заполненной жидкостью скважине [82]. Рассмотрим кратко взаимодействие движущейся катушки со средой, ограничившись низкочастотной областью.

Предполагается, что внешний корпус датчика мал по сравнению со всеми длинами волн и достаточно жесткий, чтобы двигаться с однородным смещением (т. е., как единое целое). Когда движение корпуса заблокировано, помещенная в магнитное поле катушка в ответ на ток силой I развивает силу F:

$$F(\omega)=KH(\omega)I(\omega). \qquad (6.42)$$

Рис 6.22. Применение принципа взаимности к излучению Р-волн от излучателя, помещенного в заполненной флюидом скважине.

а — схема «прямая»; *б* — схема «взаимная»

На частотах, значительно превышающих частоту механического резонанса катушки с пружиной, $H(\omega)$ практически не зависит от частоты; положим ее равной 1. Если ток $I(\omega)$ отличен от нуля только в области высоких (по сравнению с резонансом) частот, то $H(\omega)$ в (6.42) можно заменить на единицу. Тогда во временной области рассматриваемый входной сигнал представится выражением:

$$f(t)=Ki(t). \qquad (6.43)$$

Если K выражено в ньютонах на ампер, то $f(t)$ принимает такие же численные значения, как и чувствительность этого датчика (но используемого в качестве приемника) в вольтах на метр за секунду [см. формулу (6.47)]. Чтобы получить излучения объемных волн от датчика, подвешенного в заполненной жидкостью скважине, опять обратимся к условию взаимности, воспользовавшись уравнениями (5.37) и (5.38) для взаимодействия плоской волны с флюидозаполненной скважиной.

На рис. 6.22 показана схема датчика, развивающего силу, параллельную оси скважины. Скорость частиц V_r в излучаемой Р-волне оценим согласно условию взаимности. Из формулы (6.5) следует, что показанная на рис. 6.22 сосредоточенная сила $f(t)$ должна была бы вызвать смещение $f(t-r/\alpha)/(4\pi\rho\alpha^2 r)$ в точке расположения датчика. Отвечающая этому смещению плоская про-

дольная волна имеет нормальное напряжение $f''(t-r/\alpha)/(4\pi\alpha r)$, которое может быть подставлено вместо $N(T-Z\cos\delta/\alpha)$ в формулу (5.37). Отсюда следует, что скорость частиц в продольной волне, излучаемой аксиально-ориентированным датчиком, есть

$$V_r = (K/4\pi\alpha r) J_P i'(t-r/\alpha), \tag{6.44}$$

где

$$J_P = -\frac{c_T^2 \cos\delta\,[1-2(\beta\cos\delta/\alpha)^2]}{\mu\alpha\,[1-(C_T\cos\delta/\alpha)^2]}.$$

Выражение для J_P взято непосредственно из формулы (5.37) и учитывает излучение от трубной волны, возбуждаемой вибрационным датчиком. Аналогично, используя формулы (6.5) и (5.38), найдем скорость частиц в поперечной волне, излучаемой тем же датчиком:

$$V_\delta = (K/4\pi\beta r) J_S i'(t-r/\beta), \tag{6.45}$$

где

$$J_S = \frac{c_T^2 \cos\delta \sin 2\delta}{\mu\beta\,[1-(c_T\cos\delta/\beta)^2]}.$$

Еще проще аналогичные рассуждения проводятся для приемника, ориентированного перпендикулярно к оси скважины. Будем предполагать, что присутствие скважины не влияет на смещения, перпендикулярные к ее оси как в случае продольных, так и поперечных волн, падающих на скважину, и что флюид в скважине движется вместе с окружающей средой. По предположению, датчик следует движению флюида, поэтому движение датчика является точно таким же, каким бы оно было при расположении датчика во внутренних точках среды. Отсюда следует, что датчик, действующий перпендикулярно к оси скважины, излучает сейсмические колебания подобно сосредоточенной силе в безграничной среде

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{K\cos\Phi}{4\pi\rho\alpha^2 r}\, i'\left(t-\frac{r}{\alpha}\right),\\ V_\Phi &= -\frac{K\sin\Phi}{4\pi\rho\beta^2 r}\, i'\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \end{aligned} \tag{6.46}$$

Здесь $\Phi=0$ определяет направление действия силы. Для обеих рассмотренных ориентаций предполагалось, что датчик движется вместе с окружающим его флюидом. Если плотность датчика близка к плотности флюида, то это предположение несомненно оправдано.

Поведение датчика, прижатого к стенке скважины, должно быть близким к поведению вибратора на поверхности полупространства, в частности, импеданс среды выражается жесткостью пружины плюс небольшое сопротивление излучению. С учетом массы датчика это эквивалентно простому демпфированному осциллятору. Более глубокий математический анализ необходим, чтобы показать, как импеданс зависит от площади контакта, диаметра скважины и упругих констант.

ПРИЕМНИКИ ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

Идеальным следует считать такой приемник, который обеспечивает выходной сейсмический сигнал, точно отвечающий некоторой особенности сейсмической волны и не искажающий волновое поле. Следует ожидать, что устройства, размеры которых малы по сравнению со всеми длинами волн, а плотность и упругие константы мало отличаются от констант среды, незначительно искажают волновое поле. Задача состоит в том, чтобы получить выходной сигнал, пропорциональный некоторой характеристике волны, например смещению, скорости или ускорению частиц, нормальному или касательному напряжению, давлению, удлинению или деформации сдвига, изменению объема, вращению или, возможно, каким-то нелинейным комбинациям, например интенсивности. Рассмотрим кратко регистрацию перечисленных особенностей сейсмических волн.

Приемники движения

Акселерометры и геофоны. Два типа этих приемников наиболее широко используются в сейсморазведке и инженерной геофизике. Устройства первого типа имеют внутреннюю массу, которая связана с внешним корпусом посредством пьезоэлектрического кристалла или керамической пластинки. Жесткость кристалла и внутренней массы имеет резонанс на частоте, которая расположена выше исследуемого диапазона частот. Ниже резонансной частоты выходное напряжение пропорционально ускорению частиц. Выше резонансной частоты выходной сигнал пропорционален смещению частиц. Устройства второго типа имеют катушку, которая прикрепляется к корпусу посредством пружины. Последняя центрирует катушку в сильном магнитном поле. Масса катушки и жесткость пружины определяют резонанс, расположенный ниже интересующего частного диапазона. Выше частоты резонанса выходное напряжение разомкнутой цепи пропорционально скорости смещения корпуса

$$e(t)=KV(t). \tag{6.47}$$

Серийные геофоны характеризуются значением $K=40$ (В·с/м). Ниже резонанса выходной сигнал пропорционален третьей производной смещения частиц по времени (т. е. скорости изменения ускорения).

Наземные приемники. Как указывалось выше, при обсуждении наземных источников, взаимодействия источников и приемников с поверхностью представляют два аспекта одной и той же ситуации. Чтобы показать их эквивалентность, предположим, что геофон имеет жесткий корпус, находящийся в контакте с поверхностью на площади, чьи размеры малы по сравнению с интересующей нас длиной волны. Определим скорость смещения геофона, вызванную сейсмической волной, которая в отсутствие геофона вызвала бы скорость частиц V_0 на поверхности. Если бы движение

геофона каким-то образом воспрепятствовалось, то волна вызвала бы появление силы, действующей на геофон, которую мы обозначим F_B. Отношение F_B/V_0 выражает внутренний механический импеданс упругого полупространства при воздействии источника на площадь контакта. Поскольку импеданс совпадает с сопротивлением, которое оказывает среда к нагружению, данное отношение будет обозначаться как Z_L. Если механический импеданс геофона равен Z_G, то скорость геофона V_G равна $F_B/(Z_G+Z_L)$. Поскольку $F_B=V_0Z_L$, то

$$V_G=V_0Z_L/(Z_G+Z_L). \quad (6.48)$$

Это совпадает по форме с выражением (6.39), где вместо механического импеданса геофона стоит механический импеданс источника. Коэффициент усиления скорости V_G/V_0 эквивалентен силовому коэффициенту усиления, показанному на рис. 6.15.

При изучении колебаний упругого полупространства, вызываемых напряжениями, приложенными в пределах круговой области контакта, ставилось смешанное краевое условие, состоящее в том, что смещение постоянно на всем круге, а напряжения вне круга равны нулю. Чтобы избежать этого усложнения, некоторые исследователи вводят специфические распределения напряжения в круге и оценивают среднее смещение в пределах круга. Вольф [194] использовал такое распределение напряжений, которое обеспечивает постоянное смещение в статическом случае. Полученный им импеданс [см. формулу (6.38)] равен отношению общей силы к средней скорости частиц в круге. Миллер и Перси [103] предполагали равномерность нормального напряжения (при отсутствии касательных напряжений) и численным интегрированием получали среднюю скорость частиц, что позволило найти импеданс излучения.

Хувер и О'Брайен [69] непосредственно определяли коэффициент усиления по скорости без явного введения импеданса. Они предположили, что нормальное напряжение в круге постоянно и что движение геофона определяется смещением в центре круга. В результате численного интегрирования был найден коэффициент усиления для широкого диапазона значений параметров геофона и упругих констант. На рис. 6.23 приведены зависимости усиления от частоты для материала с коэффициентом Пуассона, равным 0,25. Геофон имеет массу M и радиус b. На рис. 6.23 использованы следующие безразмерные параметры: $E=M/\pi\rho b^3$ и $p=\omega b/\alpha$. Авторы показали, что полученная численным интегрированием кривая усиления может быть аппроксимирована спектральной характеристикой демпфированного осциллятора, а это и означает, что импеданс полупространства может быть выражен в виде комбинации жесткости пружины, сопротивления излучению и присоединенной массы.

Приемники в скважине. Чтобы минимизировать влияние трубных волн на сигнал геофона в глубоких скважинах, предлагались различные приемы, обеспечивающие прижимание прием-

ника к стенке скважины. Каждая трасса на рис. 6.21 была получена с помощью вертикального приемника, помещенного в цилиндрический корпус, содержащий выдвигаемые штыри. На желаемой глубине штырь освобождался, и корпус жестко прижимался посредством выдвижной штанги к стенке скважины. Этот способ использовался до глубин 50 м, но его применение существенно ограничено. Герметический зонд, содержащий расстановку сейсмоприемников и применяемый на глубинах до 1000 м, описывался Джолли [79]. В этой аппаратуре три прижимные штанги различной дли-

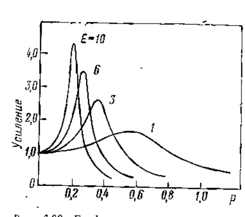


Рис. 6.23 Графики зависимости коэффициента усиления смещения для приемников с упругим полупространством [69]

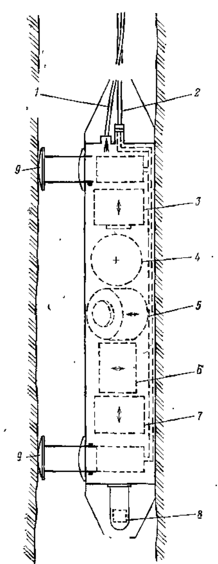


Рис. 6.24 Схема скважинного приемника с гидравлическим прижимным устройством, индикатором ориентации и вибратором для проверки прижима [197]

1 — электрический кабель; *2* — гидравлическая линия; *3* — вертикальный вибратор; *4* — преобразователь направления вибрации; *5* — горизонтальный вибратор *6* — радиальный приемник, *7* — вертикальный приемник; *8* — гидрофон, *9* — прижимной листок

ны раскрывались при помощи соленоида на максимальной глубине исследования. Масса зонда была достаточна для обеспечения жесткого контакта со скважиной при ослаблении натяжения кабеля на желаемой глубине.

Более надежное устройство, обеспечивающее жесткий контакт со стенкой скважины, было предложено Мак Донэлом и другими [102]. Зонд состоял из двух цилиндров. Трехкомпонентная расстановка приемников, влитая в пластик, жестко прикреплялась к одному полуцилиндру. Под воздействием сжатого газа гидравлический поршень раздвигал оба полуцилиндра на ширину скважины. При использовании второго вертикального приемника как источ-

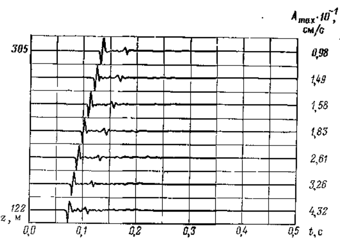


Рис. 6.25. Пример воспроизводимости записи, полученной вертикальными приемниками, зацементированными в скважине [75]

ника колебаний были проведены измерения до и после срабатывания прижимного устройства, которые показали, что данный способ является очень эффективным средством достижения контакта с изучаемой средой. Более универсальная модификация представлена на рис. 6.24. Этот зонд содержит индикатор азимута и вибратор для проверки качества прижима.

Даже при совершенном прижиме может наблюдаться влияние распространяющихся во флюиде волн. Некоторые исследователи предлагали заполнять скважину гравием или цементом с невысокой жесткостью [75, 144]. Цель состояла в том, чтобы выбрать заполнитель со свойствами окружающих пород и поместить геофон в почти однородную среду. Сейсмограмма от зацементированных геофонов приведена на рис. 6.25. Трехкомпонентная расстановка была зацементирована с интервалом 30 м на глубинах от 100 до 300 м. Сейсмограмма содержит запись вертикальных приемников от заряда массой 2 кг в мелкой скважине, расположенной в 16 м от исследуемой скважины. Точное повторение формы сигнала

на каждой глубине указывает на достижение одинакового для всех приемников контакта со средой.

Трехкомпонентные расстановки. Чтобы полностью описать движение среды в некоторой точке, необходимо провести измерение на трех взаимно ортогональных компонентах. С этой целью три геофона могут быть вмонтированы в один и тот же корпус, предназначенный либо для наземных, либо для скважинных измерений. Взаимоотношение записей на трех компонентах может помочь распознаванию типов волн: продольные и поперечные волны характеризуются движением во взаимно перпендикулярных на-

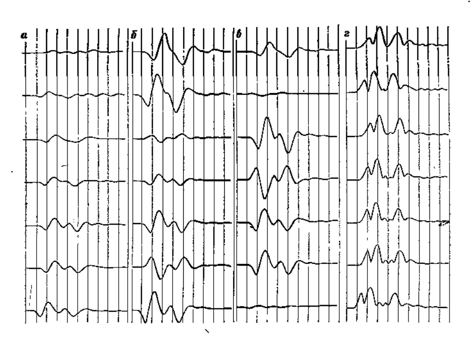


Рис. 6.26. Сейсмограммы, полученные приемниками, зацементированными в скважине (на глубинах от 125 до 310 м; сверху вниз).

а — вертикальная компонента; *б, в* — первая и вторая горизонтальные компоненты; *г* — модуль вектора смещения

правлениях; при распространении рэлеевской волны частицы движутся по эллиптическим траекториям; случайный шум характеризуется отсутствием каких-либо специфических связей между компонентами. Различные аспекты этого подхода названы «поляризационным методом» [56].

Для выделения линейно поляризованных объемных волн предложен метод, названный REMODE [80]. Умножение компонент с последующим усреднением также подчеркивает временные интервалы, в которых различные компоненты находятся в фазе [178]. Этот метод имеет следующую модификацию: вертикальная компо-

нента сдвигается на 90°, после чего она колеблется в фазе с горизонтальными компонентами для рэлеевской волны. Усредненные по времени произведения с каждой из горизонтальных компонент дают относительные амплитуды рэлеевской волны в двух горизонтальных направлениях и направление ее распространения.

При исследовании скважин весьма трудно контролировать ориентацию зонда в горизонтальной плоскости. По этой причине не так просто прослеживать волны вдоль всей скважины, так как относительные амплитуды и полярность варьируют от трассы к трассе. Сумма квадратов всех трех компонент (квадрат модуля) скорости движения частиц не зависит от ориентации и поэтому может быть использована для упрощения корреляции. На рис. 6.26 модуль скорости движения частиц сравнивается с тремя компонентами при записи геофонами, зацементированными на глубинах от 100 до 300 м. На сейсмограмме регистрируется прямая продольная волна от заряда массой 400 г, помещенного на глубину 30 м на расстоянии 460 м от исследуемой скважины.

Приемники деформации

Для изучения деформаций, сопровождающих земные приливы и землетрясения, была предложена очень чувствительная аппаратура для измерения относительных смещений между двумя точками [11]. Рядом авторов описывались приемники для измерения простого растяжения в частотном диапазоне, характерного для сейсморазведки и инженерной сейсмики. Хоувелл и другие [72] построили вертикальный деформационный сейсмометр для регистрации рефрагированных и поверхностных волн от взрывов. Возникающее на дне скважины глубиной 2,3 м смещение при помощи дюралюминиевой трубки передавалось наверх, где фиксировалось смещение частиц среды относительно верхнего края трубки. Хоувелл обнаружил, что временная зависимость этого растяжения напоминает колебание скорости движения частиц.

Советские исследователи предложили близкие идеи для регистрации деформации растяжения вблизи поверхности. Два металлических штыря помещаются в грунт на расстоянии в несколько сантиметров друг от друга, и соединяются тензодатчиком сопротивления. Изменение расстояния Δu_x между штырями изменяет сопротивления тензодатчика и вызывает импульс в цепи. При этом отношение $\Delta u_x/\Delta x$ определяет деформацию e_{xx} для больших длин волн. Сейсмограммы деформации были получены в широком диапазоне типов грунтов. Было выяснено, что сумма выходных сигналов от трех таких устройств, размещенных под прямыми углами друг к другу, дает величину $e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}$ или дилатацию. Эта комбинация приемников деформации реагирует только на продольную составляющую волнового поля, игнорируя сдвиговые деформации.

Существенно отличный подход к измерению деформации в породах использовался Дювеллом и его сотрудниками. Тензодатчи-

ки цементировались в керн, который помещался в скважины, откуда он до этого был извлечен. Было сделано все возможное, чтобы вернуть породы к первоначальному состоянию. Этот способ применим только к консолидированным породам, залегающим на небольшой глубине. Коллинс и Ли [36] дали краткое описание этого способа и проанализировали некоторые формы сигналов, возникающих при взрыве в песках.

Приемники напряжения

Хотя нормальные и касательные напряжения являются весьма специфическими характеристиками сейсмических волн, их прямое измерение вряд ли осуществимо. Советские геофизики (Ю. И. Васильев, Л. А. Иванова, М. Н. Щербо) опубликовали результаты измерения нормальных напряжений в грунтах способом, который не применим к твердым породам или к большим глубинам. Корпус приемника был изготовлен в виде цилиндра, высота которого 15—25 мм, а диаметр 6—8 см. Одна из торцевых поверхностей корпуса представляла собой дюралюминиевую диафрагму толщиной 0,5—8 мм. Тензодатчик служит индикатором прогибания диафрагмы в ответ на приложенное к ней нормальное напряжение. Самым трудным было поместить датчик напряжения в грунт. Выяснено, что комплект из трех взаимно перпендикулярных приемников нормального напряжения позволяет получить величину $-p=(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})/3$, которая реагирует только на продольные волны.

Графики напряжения в зависимости от деформации обнаруживают незамкнутые петли, указывающие на потерю энергии. Относительная потеря энергии $\Delta W/W$ дает поглощение, соответствующее литературным данным.

Приемники вращения

При обсуждении этого типа деформации (см. рис. 2.1) отмечалось, что чистый сдвиг пропорционален сумме двух частных производных, тогда как вращение, сопровождающее данную деформацию, пропорционально разности этих же произведений. Если применить это соображение к SV-волне [см. (2.22)], мы найдем, что имеется только одно вращение, а именно: вращение вокруг оси v, которое определяется выражением:

$$2\Omega_y=\frac{\partial u_z}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial z}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial x}+\frac{\partial^2\Psi_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2\Psi_y}{\partial z^2}=\frac{1}{\beta^2}\,\frac{\partial^2\Psi_y}{\partial t^2}.$$

Это вращение не зависит от скалярного потенциала. Следовательно, приемник, чувствительный только к вращению, представляет интерес для регистрации поперечных волн.

При регистрации сейсмических волн в сейсморазведке применялись акселерометры вращения, предназначенные для других технических целей. В экспериментальной модели из таких приемников, построенной компанией «Статхэм Инструментс», для измерения вращения корпуса использовалась инерция флюида, заполнявшего круговые каналы. Заполненные флюидом кольцевые каналы имели диаметр 10,2 см. Сечение канала имело горизонтальный размер 6,3 мм и вертикальный размер 2,5 см. Помещенный во флюид ротор скреплялся с корпусом тензодатчиком.

Когда флюид двигался относительно корпуса, то вследствие вязкости вертушка также увлекалась флюидом, вызывая сигнал, пропорциональный ускорению вращения корпуса. При регистрации колебаний, возбуждаемых динамитом, этот приемник реагировал на рэлеевские волны, совсем не реагируя на продольные колебания. При использовании этой же аппаратуры в аналогичных экспериментах, геофизики геологической службы США обнаружили высачивание флюида (масла) и сильную чувствительность к линейному ускорению.

Список литературы

1. *Abo-Zena A. M.* Radiation from a finite cylindrical explosive source. Geophysics, 42, 1977, 1384—1393.
2. *Abramowitz M.* and *Stegun I. A.* Handbook of Mathematical functions. Dover, New York, N. Y., 1970, 1046 p.
3. *Albright J. N.* and *Hanold R. J.* Seismic mapping of hydraulic fractures made in basement rocks. In: B. Linville (Editor). Second ERDA Symposium on Enhanced Oil and Gas Recovery. The Petroleum Publishing Company, Tulsa, Okla, 1976
4. *Anderson A. L.* and *Hampton L. D* Acoustics of gas-bearing sediments, I. Background, and II: Measurements and models. J Acoust. Soc. Am., 67, 1980, 1865—1903.
5. *Anderson D. L.* and *Hart R. S. Q.* of the Earth. J Geophys. Res., 83, 1978, 5869—5882.
6. *Applegate J. K.* A Torsional Seismic Sourse. Ph D Diss, Colorado School of Mines, Golden, Colo, 1974.
7. *Armstrong B. H.* Frequency-independent background internal friction in heterogeneous solids. Geophysics, 1980, 1042—1054
8. *Backus G. E.* Long-wave anisotropy produced by horisontal layering. J. Geophys. Res., 67, 1962, 4427—4440.
9. *Ballard Jr. R. F.* Site Evaluation by Geophysical Methods 48th Annu. Meeting of the Soc Explor. Geophys, San Francisco, Calif. Paper E-2, 1978
10. *Barton D. C.* The seismic method of mapping geologic structure. AIME, Geophys. Prospect, 1929, 572—624
11. *Benioff H.* Fused-quartz extensometer for secular, tidal and seismic strains. Bull. Geol. Soc Am., 70, 1951, 1019—1032.
12. *Берзон И. С.* Сейсмические волны в тонкослоистых средах. М., Наука, 1973, 222 с
13. *Biot M. A.* Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid J. Appl. Phys., 23, 1952, 997—1005
14. *Biot M. A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluidsaturated porous solid, I: Low-frequency range. J. Acoust Soc. Am., 28, 1956a, 168—178.
15. *Biot M. A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, II: Higher frequency range. J. Acoust. Soc. Am., 28; 1956b, 179—191.
16. *Biot M. A.* Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. J. Appl. Phys., 33, 1962, 1482—1498.
17. *Birch F.* Velocity and attenuation from resonant vibrations of spheres of rock, glass and steel. J. Geophys. Res., 80, 1975, 756—764.
18. *Blaik M.* Deep-hole seismic noise correlation and spectra. J Geophys. Res., 66, 1961, p. 2514 (abstract)
19. *Blake Jr. F. G.* Spherical wave propagation in solid media J. Acoust. Soc. Am., 24, 1952, 211—215
20. *Born W. T.* The attenuation constant of earth materials Geophysics, 6, 1941, 132—148.
21. *Bradley J. J.* and *Fort Jr. A. N.* Internal friction in rocks In: S. P Clark, Jr (Editor). Handbook of Physical Constants. Geol Soc. Am Mem., 97; 1966, 175—193.
22. *Brandt H. A.* Study of the speed of sound in porous granular media. J. Appl. Mech, 77, 1955, 479—486.
23. *Brennan B. J.* Linear viscoelastic behavior in rocks. In: T. D Stacey, M S. Paterson and A. Nicholas (Editors), Anelasticity in the Earth. Geodynamics Series. Vol. 4, Am. Geophys. Union, 1981, 13—22.
24. *Brennan B. J.* and *Smylie D. E.* Linear viscoelasticity and dispersion in seismic wave propagation. Rev. Geophys. Space Phys., 19, 1981, 233—246.

25 *Broding R. A.* and *Hearn D. P.* Evaluation of a Pressure Detector as a Deep Well Seismometer. Report P-64-61-2, Contract No. AF 19(604)—8454, August 23, 1961 Century Geophysical Corporation and Advanced Research Projects Agency, 1961.
26 *Brown G. L.* Seismic Torsional Wave Generator. U. S. Patent No 3, 280, 935, 1963.
27. *Bruckshaw J. McG.* and *Mahanta P. C.* The variation of the elastic constants of rocks with frequency. Petroleum, 17; 1954, 14—18.
28 *Bruggeman D. A. G.* Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen, I: Dieliktrizitätskostanten und Leitfähigkeiten der Mischkör per aus Isotropen Substanzen. Ann. Phys., 24, 1935, 636—679.
29. *Bruggeman D. A. G.* Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen, III: Die elastischen Konstanten der quasiisotropen Mischkörper aus isotropen Substanzen. Ann. Phys., 29, 1937, 160—178.
30. *Budiansky B.* and *O'Connell R. L.* Elastic moduli of a cracked solid. Int. J. Solid. Struct. 12, 1976, 81—97.
31. *Cagniard L.* Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. McGraw-Hill New-York, N. Y., 1962, 282 p.
32. *Campbell G. A.* and *Foster R. M.* Fourier Integrals for Practical Applications. Van Nostrand, New-York, N. Y., 1948, 177 p.
33. *Cattaneo C.* Sul Contatto di due Corpi Elastici. Accad. Lincei, 27, 1938, 342—348, 434—436, 474—478.
34. *Cheng C. H.* and *Toksöz M. N.* Elastic wave propagation in a fluid-filled borehole and synthetic acoustics logs. Geophysics, 46, 1981, 1042—1053.
35 *Cherry Jr J. T.* The azimuthal and polar radiation patterns obtained from a horisontal stress applied at the surface of an elastic half space. Bull. Seismol. Soc. Am. 52, 1962, 27—36.
36 *Collins F.* and *Lee C. C.* Seismic wave attenuation characteristics from pulse experiments. Geophysics, 21, 1956, 16—40.
37. *Deresiewicz H. A.* Review of some recent studies of the mechanical behavior of granular media. Appl Mech. Rev., 11, 1958, 259—261.
38 *Deresiewicz H.* and *Rice J. F.* The effect of boundaries on wave propagation in a fluid-filled porous solid, III: Reflection of plane waves at a free boundary Bull. Seismol. Soc. Am., 52, 1962, 595—625.
39 *Dix C. H.* Interpretation of well-shot data. Geophysics, 4, 1939. 24—32.
40 *Dix C. H.* The mechanizm of generation of long waves from explosions. Geophysics, 20, 1955, 87—105.
41. *Dobrin M. B.* Rayleigh waves from small explosins Trans. Am Geophys. Union, 32, 1951, 822—832
42. *Duffy J.* and *Mindlin R. D.* Stress-strain relations and vibrations of a granular medium. J Appl. Mech, 24, 1957, 585—593.
43. *Dutta N. C.* Theoretical analysis of observed second bulk compressional wave in a fluid-saturated porous solid et ultrasonic frequences. Appl. Phys. Lett, 37, 1980, 898—900.
44. *Dutta N. C.* and *Ode H.* Attenuation and dispersion of compressional waves in fluid-filled porous rocks with partial gas saturation (White model), Part I: Biot theory, Part II: Results, Geophysics, 44, 1979, 1777—1805.
45. *Dutta N. C.* and *Seriff A. J.* On White's model of attenuation in rocks with partial gas saturation, Geophysics, 44, 1979, 1806—1812.
46. *Eshelby J. D.* The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, Proc. R. Soc London, Ser. A., 221, 1957, 376—396.
47. *Ewing W. M., Jardetzky W. S.* and *Press F.* Elastic Waves in Layered Media McGraw-Hill, New-York, N. Y., 1957, 380 p.
48. *Farnwell G. W.* Properties of elastic surface waves In: W. P. Mason and R N. Thurston (Editors). Physical Acoustics Academic Press, New-York, N Y, 6, 1970, 109—166
49 *Федоров Ф И.* Теории упругих волн в кристаллах. М., Наука, 1965 388 с.
50. *Fessenden R. A.* Methods and Apparatus for locating Ore Bodies. U. S. Patent 1, 240, 328, September 18, 1917.

51. *Flinn E. A., Rugg A. M., Woolson J. R.* and *Rommey C. F.* Analytical results from low-frequency seismic measurements in a deep well. J. Geophys. Res. 66, 1961, p 2528 (abstract).
52. *Fraser D. B.* and *LeGraw R. C.* Novel methods of measuring elastic and anelastic properties of solids. Rev. Sci. Instrum, 35, 1964, 1113—1115.
53. *Френкель Я. И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз. 1944, № 4.
54. *Futterman W. I.*, 19 Dispersive Body Waves, J. Geophys. Res, 67, 1962, 5279—5291.
55. *Гальперин Е. И* Вертикальное сейсмическое профилирование М, Недра, 1974. 264 с.
56. *Гальперин Е. И.* Поляризационный метод сейсмической разведки. М., Недра, 1977. 280 с.
57. *Ganley D. C.* and *Kanasewich E. R.* Measurement of absorption and dispersion from check shot surveys. J. Geophys. Res., 852, 1980, 5219—5226.
58 *Gardner G. H. F.* Extensional waves in fluid-saturated porous cylinders. J. Acoust. Soc. Am, 34, 1962, 36—40.
59. *Gassman F.* Über die Elastizität Poröser Medien. Vierteljahrsschr Naturforsch. Ges. Zurich, 96, 1951, 1—23.
60. *Gassman F.*. Elastic waves through a packing of spheres Geophysics, 16 and 18, 1951b, 673—585 and 269.
61. *Geertsma J.* and *Smit D. C.* Some aspects of elastic wave propagation in fluid-saturated porous solids. Geophysics, 26, 1961, 169—181.
62. *Graebner M.* Energy flux of Waves in Elastic and Viscoelastic Media Ph. D. Thesis, Colorado School of Mines, Golden, Colo, 1982, 147 p.
63. *Hara G.* Theorie der Akustischen Schwingungsausbreitung in Gekörten Substanzen und Experimentalle Untersuchungen an Kohlepulver. Elek, Nachr. Tech., 12, 1935, 191—200.
64. *Hardy Jr. R. H.* Some current applications of microseismic techniques in geomechanics. In: G. W. Borm (Editor), Rock Dynamics and Geophysical Aspects. Balkema.
65. *Hauge P. S.* Measurements of attenuation from vertical seismic profiles. Geophysics, 46, 1981, 1548—1558
66. *Heelan P. A.* Radiation from a cylindrical source of finite length Geophysics, 16, 1953, 685—696.
67. *Helbig K.* Elastische Wellen in Anisotropen Medien. Gerlands Beitr. Geofizik, 67, 1958, 256—288.
68 *Hicks W. G.* and *Berry J. E.* Application of continuous velocity logs to determination of fluid saturation of reservoir rocks. Geophysics, 21, 1956, 739—754.
69. *Hoover G. M.* and *O'Brien J. T.* The influence of the planted geophone on seismic land data. Geophysics, 45, 1980, 1239—1253
70. *Horton C. W.* Secondary arrivals in a well velocity survey Geophysics, 8, 1943, 290—296.
71. *Howell L. G.*, *Kean C. H.* and *Thompson R. R.* Propagation of elastic waves in the Earth Geophysics, 5, 1940, 1—14.
72. *Howell L. G.*, *Neuenschwander E. F.* and *Pierson S. L.* Gulf coast surface waves. Geophysics, 18, 1953, 41—53.
73. *Iida K.* Velocity of elastic waves in a granular substance Bull. Earthquake Res. Inst., Tokyo Univ., 17, 1939, 783—808.
74. *Jackson D. D.* and *Anderson D. L.* Physical mechanisms of seismic-wave attenuation. Rev. Geophys. Space Phys., 8, 1970, 1—63.
75. *Janak P. M.* A Comparison and Analysis of Seismic Land Source Energy Relationships and Radiation Patterns. Ph. D. Thesis, Colorado School of Mines, Golden, Colo, 1982, 349 p.
76. *Johnson K. L.* Surface interaction between elastically loaded bodies under tangential forces Proc. R. Soc. London, Ser. A, 230. 1955, 531—548
77. *Johnson L. R.* Seismic source theory. Rev. Geophys Space Phys., 17, 1979, 328—336.
78 *Johnston D. H.* and *Toksöz M. N.* Seismic Wave Attenuation. Soc Explor Geophys., Geophysics Reprint Ser. 2, Tulsa, Okla, 1981, 459 p.

79 *Jolly R. N.* Deep-hole geophone study in Garvin County, Oklahoma, Geophysics, 18, 1953, 662—670
80. *Kanasewich E. R.* Time Sequence Analysis in Geophysics (2nd rev. ed.). University of Alberta Press, Edmonton, Alta, 1975, 301—304 p.
81. *Халевин Н. И., Барыкин Д. Д.* Установка для акустических исследований в буровых скважинах. Изв. АН СССР. Сер. геофиз. № 1, 1961, с. 69—78.
82. *Kitsunezaki C.* A new method for shear wave logging. Geophysics, 45, 1980, 1489—1506.
83. *Kjartansson E.* Costant Q-wave propagation and attenuatuon J. Geophys. Res., 84, 1979, 4737—4748.
84. *Knopoff L.* and *Gangi A. F.* Seismic reciprocity. Geophysics, 24, 1959, 681—691.
85. *Koefoed O.* Some observations on seismic weathering corrections. Geophys Prospect., 2, 1954, 274—280.
86. *Kolsky H.* The propagation of the stress pulses in viscoelastic solids. Reprinted in: D. H. Jonston and M. N Toksöz (Editors), Seismic Wave Attenuation. Soc. Explor. Geophys., Geophysics Reprint Series No. 2, 1956 365—404.
87 *Korn G. A.* and *Korn T. M* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. McGraw-Hill, New-York, N. Y., 1961, 443 p. (Есть перевод. Г. Корн и Т. Корн Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. М., Наука, 1970, 720 с.).
88. *Kramer F. S., Peterson R. A.* and *Walter W, C* Seismic Energy Sources 1968 Handbook United Geophysical Corp, Pasadena, Calif., 1968, 57 p.
89 *Kuster G.* and *Toksöz M. N.* Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media. Part I; Theoretical formulations. Geophysics, 39, 1974, 587—606.
90 *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid Philos Trans. R Soc. London, Ser A., 203, 1904, 1—42.
91 *Lamb H.* Statics. Cambridge University Press. New York, N. Y., 1960, 357 p.
92 *Lerwill W. E.* The amplitude and phase response of a seismic vibrator, Geophys. Prospect., 29, 1981, 503—528
93. *Levin F. K.* Seismic velocities in transversly isotropic media. Geophysics, 44, 1979, 918—936.
94. *Levin F. K.* and *Lynn R. D.* Deep-hole geophone studies. Geophysics, 23, 1958, 639—664.
95. *Love A. E. H.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (4th ed). Dover, New-York, N. Y., 1944, 643 p. (Есть перевод: Ляв А. Е. Математическая теория упругости. М, ОНТИ, 1935).
96. *Macdonald J. R.* Rayleigh-wave dissipation functions in lowloss media. Geophys J. R Astron. Soc., 2, 1959, 132—135.
97. *Mason W. P.* Acoustic Properties of Solids New Directions in Physical Acoustics LXIII Corso, Society Italiana di Fisica, Bologna, 1976, 266 p.
98. *Mason W. P., Marfort K. L., Beshers D. N.* and *Kuo J. T.* Internal friction of metal spheres showing the effect of the anisotropy of the component metals. J. Acoust. Soc. Am., 62, 1977, 1206—1212.
99 *Mason W. P., Marfurt K. J., Beshers D. N.* and *Kuo J. T.* Internal friction in rocks. J. Acoust. Soc. Am., 63, 1978, 1596—1603.
100. *Mavko G. M.* and *Nur A.* Wave attenuation in partially saturated rocks. Geophysics, 44, 1979, 161—178.
101. *McCollum B.* and *LaRue W. W.* Utilization of existing wells in seismograph work. Bull. Am. Assoc. Pet. Geol., 15, 1931, 1409—1417.
102 *McDonal F. J., Angona F. A., Mills R. L., Sengbush R. L.* Van Nostrand R G. and White J. E, 1958. Attenuation of shear and compressional waves in pierre shale. Geophysics, 23, 1958, 421—439
103 *Miller G. F.* and *Pursey H.* The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid. Proc. R Soc London. Ser A, 223, 1954, 521—541.
104. *Mindlin R. D.* Compliance of elastic bodies in contact. J. Appl. Mech. Trans., ASME, 71, 1949, 259—268.
105 *Mindlin R. D., Mason W. P., Osmer T. F.* and *Deresiewicz H.* Effects of

an oscillating Tangential Force on the Contact Surfaces of Elastic Spheres. Proc 1st. U S. Nat. Congress of Applied Mechanics, 1951, p. 203—208.
106. *Morlet J., Arens G., Fourgeau E.* and *Giard D.* Wave propagation and sampling theory, Part I: Complex signal and scattering in multilayered media. Geophysics, 47, 1982, 203—221
107. *Morse P M.* and *Feshbach H.* Methods of Theoretical Physics McGraw-Hill, New-York N. Y., 1953, p. 882 and 1783. (Есть перевод. Ф. М. Морс и Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. 1 и 2. М., ИЛ, 1958).
108. *Morse R. W.* Acoustic propagation in granular media. J. Acoust. Soc. Am, 24, 1952, 696—700.
109. *Nafe J. E.* and *Drake C. L.* Variation with depth in shallow and deep water marine sediments of porosity, density and the velocities of compressional and shear waves. Geophysics, 22, 1957, 523—552.
110. *Nettleton L. L.* Geophysical Prospecting for Oil McGraw-Hill, New-York, N. Y., 1940, 444 p.
111. *O'Brien P. N. S.* and *Lucas A. L.* Velocity dispersion of seismic waves. Geophys Prospect. 1971, 19, 1—26.
112. *Ording J. R.* and *Redding V. L.* Sound waves observed in mud-filled well after surface dynamite charges. J. Acoust. Soc. Am, 25, 1953, 719—726.
113. *Paitet F. L.* Acoustic Propagation in the Vicinity of Fractures which Intersect a Fluid-filled Borehole Paper DD, 21st Annual Logging Symposium of the Society of Proffessional Well-Log Analysis, Mexico City, July 8—11, 1980, 33 p
114. *Palmer I. D.* and *Traviolia M. L.* Attenuation by squirt flow in undersaturated gas sands. Geophysics, 45, 1980, 1780—1792
115. *Papoulis A.* The Fourier Integral and its applications McGraw-Hill, New-York, N. Y., 1962, 311 p (Есть перевод: А. Папулис. Теория систем и преобразований в оптике. М., Мир, 1971, 495 с.).
116. *Parrott K. R.* An Investigation of the Interior of a Salt Structure Using the Vertical Seismic Profiling Technique. Ph D. Thesis, Colorado School of Mines, Golden, Colo., 1980, 133 p.
117 *Paterson N. R.* Seismic wave propagation in porous granular media. Geophysics, 21, 1956, 691—714
118. *Pekeris C. L., Alterman Z.* and *Abromovici F.* Propagation of an SH-torque pulse in a layered solid Bull. Seismol. Soc. Am., 53, 1963. 39—57.
119 *Peselnick L.* and *Outerbridge W. F.* Internal friction in shear and shear modulus of Solenhofen limestone over a frequency range of 10^7 cycles per second. J Geophys. Res., 66, 1961, 581—588.
120. *Pilant W. L.* Elastic waves in the Earth Elsevier, Amsterdam, 1979, 493 p
121. *Plona T. J.* Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonuc frequences Appl Phys Lett., 36, 1980, 259—261.
122. *Postma G. W.* Wave propagation in a stratified medium Geophysics, 20, 1955, 780—806.
123. *Poulter T. C.* The Poulter seismic method of geophysical exploration Geophysics, 15, 1950, 181—207.
124 *Press F.* and *Healy J.* Absorption of Rayleigh waves in melow-loss media J. Appl. Phys. 28, 1957, 1323—1325.
125. *Rayleigh L* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. Proc London Math. Soc 17, 1885, 4—11.
126. *Richards P. G.* Theoretical seismic wave propagation. Am Geophys. Union, Rev. Geophys. Space Phys, 17, 1979, 312—328.
127. *Ricker N.* The form and laws of propagation of seismic wavelets Geophysics, 18, 1953, 10—40.
128. *Riggs E. D.* Seismic wave types in a borehole. Geophysics, 20, 1955, 53—67
129. *Ризниченко Ю В.* О сейсмической квазианизотропии. Изв. АН СССР, Сер. геогр и геофиз. 1949, № 6.
130. *Ризниченко Ю. В.* Распространение сейсмических волн в дискретных и гетерогенных средах. Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз, 1949, № 8
131. *Robinson E. A.* and *Treitel S.* The spectral function of a layered system and the determination of the waveforms at depth. Geophys Prospect., 25, 1977, 434—459.

132. *Robinson J. C.* A technique for the continuous representation of dispersion in seismic data. Geophysics, 44, 1979, 1345—1351.
133. *Roever W. L., Rosenbaum J. H.* and *Vining T. F.* Acoustic waves from an impulsive source in a fluid-filled borehole. J. Acoust. Soc. Am., 55, 1974, 1144—1157.
134. *Rosenbaum J. H.* Synthetic microseismograms-Logging in porous formations. Geophysics, 39, 1974, 14—32.
135. *Rudzki M. P.* Parametrische Darstellung der elastischen Wellen in Anisotropen Medien. Academy of Science Cracovie, Bull., 8a, 1911, 503—536.
136. *Рытов С. М.* Упругие свойства тонкослоистой среды. Акустический журнал, 1956, т. 2, вып. 2.
137. *Savage J. C.* Thermoelastic attenuation of elastic waves by cracks. J. Geophys. Res., 71, 1966, 3929—3938
138. *Schmidt H* Die Schallausbreitung in Kornigen Substanzen Acustica, 4, 1954, 639—652.
139. *Schoenberg M.* Elastic wave behavior across linear slip interfaces. J. Acoust. Soc. Am., 68, 1980, 1516—1521
140. *Schoenberg M.* and *Levin F. K.* Apparent attenuation due to intrabed multiples II, Geophysics, 42, 1978, 730—737.
141. *Sengbush R. L.* Modern Seismic Exploration. Pexcon International, Houston, Texas, 1978, 318 p.
142. *Sharpe J. A.* The production of elastic waves by explosion pressures, parts I and II. Geophysics, 7, 1942, 144—154, 311—321.
143 *Shumway G.* Sound velocity vs. temperature in water-saturated sediments Geophysics, 23, 1958, 494—505.
144. *Sixta D. P.* Comparison and Analysis of Downgoing Waveforms from Land Seismic Sources. Ph. D. Thesis, Colorado School of Mines, Golden, Colo, 1982.
145. *Spencer Jr. J. W.* Stress relaxations at low frequences in fluidsaturated rocks: Attenuation and modulus dispersion. J. Geophys. Res., 86, 1981, 1803—1812
146. *Spencer T. W., Edwards C. M.* and *Sonnald J. R.* Seismic wave attenuation in nonresolvable cyclic stratification Geophysics, 42, 1977, 939—949
147. *Stein S., Mills Jr. J. M.* and *Geller R. J.* Q^{-1} Models from data Space inversion of fundamental spheroidal mode attenuation measurements. In: F. D. Stacey, M. S. Paterson and A. Nicholas (Editors), Anelasticity in the Earth Am. Geophys. Union, Geodynamics Series, 4, 1981, 39—53.
148. *Stoll R. D.* and *Bryan G. M.* Wave attenuation in saturated sediments. J. Acoust. Soc. Am., 47, 1970, 1440—1447.
149. *Stoneley R.* The seismological implications of aeolotropy in continental structure. Monthly Notices, R. Astron. Soc., Geophys. Suppl., 5, 1949, 343—353.
150. *Strick E.* The determination of Q, dynamic viscosity and transient creep curves from wave prapagation measurements. Geophys. J. R. Astron. Soc., 13, 1967, 197—218.
151. *Strick E.* A predicted pedestal effect for pulse propagation in constant — Q solids Geophysics, 35, 1970, 387—403.
152. *Summers G. C.* and *Broding R. A.* Continious velocity logging. Geophysics, 17, 1952, 598—614.
153. *Sutton G. H., Berckhemer H.* and *Nafe J. E.* Physical Analysis of deep-sea sediments. Geophysics, 22, 1957, 779—812.
154. *Szabo T. L.* Anisotropic surface acoustic wave diffraction. In: W. P. Mason and R. N. Thurston (Editors), Physical Acoustics Academic Press, New-York, N. Y, 13, 1977, 79—113.
155. *Takahashi F.* and *Sato Y.* On the theory of elastic waves in granular substance. Bull Earthquake Research Institute. Tokyo Univ., 27, 1949, 11—16.
156. *Takeuchi H.* and *Saito M.* Seismic surface waves. In: B. A. Bolt (Editor). Methods in Computational Physics, v. 11, Academic Press, New-York, N. Y., 1972, p. 217—295.
157. *Telford W. M., Geldart L. P., Sheriff R. E.* and *Keys D. A.* Applied Geophysics. Cambridge University Press, Cambridge, Mass., 1976, 860 p.

158. *Timoshenko S.* and *Goodier J. N.* Theory of Elasticity (2d ed). McGraw-Hill, New-York, N. Y., 1951, 506 p. (Есть перевод: Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., Наука, 1975).
159. *Tittmann B. R.* Internal friction measurements and their implications in seismic Q structure models of the crust. In: D. H Johnston and M. N. Toksöz (Editors). Seismic Wave Attenuation. Soc. Explor. Geophys., Tulsa, Okla, 1981, p. 81—97.
160. *Tittmann B. R.* and *Curnow J. M.* Apparatus for measuring internal friction Q factors in brittle materials, Rev. Sci Instrum., 47, 1976, 1516—1518.
161. *Tongtaow C.* Transient Response of an Acoustic Logging Tool in Transversly Isotropic Media. Ph. D. Thesis, Colorado School of Mines, Golden, Colo, 1980, 183 p.
162. *Tsang L.* and *Rader D.* Numerical evaluation of transient acoustic waveform due to a point source in a fluidfilled borehole. Geophysics, 44, 1979, 1706—1720.
163 *Tuloos F. N.* and *Reid A. C.* Seismic attenuation of Gulf Coast sediments. Geophysics, 34, 1969, 516—528.
164. *Turner G. J.* and *Stacey F. D.* Frequency dependence of Q for rock stressed near the breaking point. In: F D. Stacey, M. S. Paterson and A Nicholas (Editors). Anelastisity in the Earth. Am Geophys. Union. Geodynamics Series, 4, 1981, 83—85.
165 *Uhrig L. F.* and *Van Melle F. A.* Velocity anisotropy in strafified media. Geophysics, 20, 1955, 774—779.
166. *Urick R. L* A sound velocity method for determining of finely divided substances J. Appl. Physics, 18, 1947, 983—987.
167. *Usher M. J.* Elastic behavoir in rocks at low frequences Geophys Prospect., 10, 1962, 119—127.
168. *Van Melle F. A,* Note on "The Primary Seismic Disturbance in Shale" by N. Ricker and W. A Sorge. In Bulletin Seismological Society of America, July 1951. Bull Sessmol. Soc Am., 44, 1954, 123—125
169 *Vogel C. B.* A seismic velocity logging method Geophysics, 17, 1952, 586—597.
170. *Vogel C. B.* and *Herolz R. A.* The CAD, a Circumferential Acoustical Device for Well logging Paper 6819, 52nd Coference, Society of Petroleum Engineers of ALME, October, 1977.
171. *Walsh J. B.* The effect of cracks on the compressibility of rock. J Geophys. Res, 70, 1965, 381—389
172. *Walsh J. B* Seismic wave attenuation in rock due to friction. J. Geophys. Res, 71, 1966, 2591—2599
173. *Waters K. Reflection* Seismology (2nd ed). Wiley, New-York, N. Y, 1981, 453 p
174. *Welsh E.* Borehole Coupling in Porous Media. Ph d. Thesis, Colorado School of Mines, Golden, Colo, 1978, 63 p
175. *White J. E.* Signals in a borehole duc to plane waves in the solid J. Acoust. Soc. Am, 25, 1953, 906—915.
176. *White J. E.* Use of reciprocity theorem for computation of low-frequency radiation patterns Geophysics, 25, 1960, 613—624.
177. *White J E.* Elastic waves along a cylindrical bore Geophysics, 27, 1962, 327—333.
178. *White J. E.* Motion products seismograms Geophysics, 29, 1964, 288—298.
179. *White J. E.* Seismic Waves: Radiation, Transmission and Attenuation. McGraw-Hill, New-York, N. Y., 1965, 302 p.
180. *White J. E. The Hula Log.* A Proposed Acoustic Tool. Transcript. Society of Professional Well Log Analysts, Paper I, Eighth Annual Logging Symposium, Denver, Colo, June 11—14, 1967, 30 p.
181. *White J. E.* Strains in a "Constant Q" Solid, 6th Int. Congress on Acoustics, Tokyo, August 21—28, 1968, 4 p
182. *White J. E.* Seismic Reflections from Gas Reservoirs Final Report, National Science Foundation, Contract No AER75—17526 (October, 1977), 122 p.
183. *White J. E.* Spot-welded Model of Cracked Rock Meeting, Society of Exploration Geophysicists, New Orleans, Paper R-20, No. 4—8, 1979, 21 p.

184 *White J. E.* Computed waveforms in transversly isotropic media Geophysics, 47, 1982, 771—783.
185 *White J. E.* and *Agona F. A.* Elastic wave velocities in laminated media J. Acoust. Soc. Am., 27, 1955, 310—317.
186. *White J. E.* and *Frost H. H.* Unexpected waves observed in fluidfilled boreholes. J. Acoust. Soc. Am., 28, 1956, 924—927.
187. *White J. E.* and *Sengbush R. L.* Velocity measurements in nearsurface formations. Geophysics, 18, 1953, 54—69
188. *White J. E.* and *Sengbush R. L.* Shear waves from explosion sources. Geophysics, 28, 1963, 1001—1019.
189. *White J. E.* and *Tongtaow C.* Cylindrical waves in transversly isotropic media. J. Acoust. Soc Am., 70, 1981, 1147—1155.
190. *White J. E.* and *Walsh D J.* Proposed attenuation-dispersion pair for seismic waves. Geophysics, 37, 1972, 456—461.
191. *White J. E.* and *Zechman R. E.* Computed response of an acoustic logging tool Geophysics, 33, 1968, 302—310.
192. *White J. E., Mikhaylova N. G.* and *Lyakhovitsky F. M.* Low-frequency seismic waves in fluid-saturated layered rocks Phys Solid Earth, 1975, pp. 654—659. (Есть русский вариант: Уайт Дж. Е., Михайлова Н. Г. и Ляховицкий Ф. М. Распространение сейсмических волн в слоистых средах, насыщенных жидкостью и газом).
193. *Winkler K.* and *Nur A.* Friction and seismic attenuation in rocks Nature, 277, 1979, 528—531.
194. *The equation* of motion of a geophone on the surface of an elastic earth, Geophysics, 9, 1944, 29—35.
195. *Wood A. B.* A Textbook of Sound Bell London, 1941, 578 p.
196. *Wuenschel P. C.* Dispersive body waves — an experimental study. Geophysics, 30, 1965, 539—551.
197. *Wuenschel P. C.* The vertical array in reflection seismology Geophysics, 411, 1976, 219—232.
198. *Wyllie M. R. J., Gregory A. R.* and *Gardner D. W.* Elastic wave velocities in heterogeneous and porous media Geophysics, 21, 1956, 41—70.
199. *Wyllie M. R. J., Gregory A. R.* and *Gardner G. H. F.* An experimental investigation of factors affecting elastic wave velocities in porous media. Geophysics, 23, 1958, 459—493
200 *Young T. K.* The Application of Generalized Ray Theory to the Study of Elastic Wave Propagation in the Borehole Environment. Ph. D. Thesis, Colorado School of Mines, Golden, Colo, 1979, 118 p.
201. *Zemanek J., Glenn E. E., Norton L. J.* and *Caldwell R. L.* Formation evaluation by inspection with the borehole televiewer Geophysics, 35, 1970, 254—269.
202. *Земцов Е. Е.* О влиянии нефте- и газоносных залежей на динамические характеристики отраженных волн Разв. геофизика, вып. 8, 1965, с. 3—12.
203 *Zwikker C.* and *Kosten C. W.* Sound Absorbing Materials Elsevier, New-Work. N. Y., 1949.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ИЗДАНИЕ

Дж. Э. Уайт

ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

Редактор издательства *Т. И. Борушко*
Переплет художника *Б. К. Силаева*
Художественный редактор ***В. В. Шутько***
Технические редакторы *О. Ю. Трепенок, Л. Г. Лаврентьева*
Корректор *И. Н. Таранева*

ИБ № 6361

Сдано в набор 07.02.86. Подписано в печать 19.05.86. Формат 60×90 1/16. Бумага книжно-журнальная Гарнитура Литературная Печать высокая Усл. печ. л. 16,5. Усл. кр.-отт. 16,5. Уч изд. л 17,3. Тираж 3000 экз. Зак 14/638-3/390. Цена 1 р 50 коп.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра»,
103633, Москва, Третьяковский проезд, 1/19.

Набрано в Московской типографии № 13 ПО «Периодика» ВО «Союзполиграфпром» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 107005, Москва, Б-5, Денисовский пер., дом 30

Отпечатано в Подольском филиале ПО «Периодика» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
142110, г. Подольск, ул. Кирова, д. 25.